

北京市高等教育精品教材立项项目

高等院校精品教材系列·工程力学模块化系列教材

静 力 学

汪越胜 金 明 主编

税国双 副主编

電子工業出版社·

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书为国家精品课程配套教材，根据教育部高等学校力学教学指导委员会力学基础课程教学指导分委员会制定的“理论力学课程教学基本要求（A类）”编写而成。全书共6章，内容包括绪论、静力学公理与物体受力分析、平面简单力系、平面任意力系、空间力系、摩擦及习题参考答案。内容编排上，本书既便于学生自学，也便于教师针对不同的学时选择不同的教学方式。

本书可作为高等院校土建类、机电类相关专业的理论力学教材，也可供高职、高专及成人教育各专业理论力学课程使用。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容
版权所有·侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

静力学 / 汪越胜, 金明主编. —北京: 电子工业出版社, 2011.11

高等院校精品教材系列·工程力学模块化系列教材

ISBN 978-7-121-15095-1

I. ①静… II. ①汪… ②金… III. ①静力学—高等学校—教材 IV. ①O312

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 234443 号

策划编辑: 余 义

责任编辑: 余 义

印 刷:

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 10.5 字数: 282 千字

印 次: 2011 年 11 月第 1 次印刷

印 数: 4000 册 定价: 23.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zlls@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010) 88258888。

序

力学是大多数工程科学，如土木工程、机械工程、材料工程、航空航天、能源动力、交通运输、化工等的基础，是工科学生学习专业知识和技能的基础课程。不仅如此，力学还有着不同于其他学科的思维方式，是理工科学生应普遍接受的思维训练之一。

目前，我校的“工程力学”课程被评为国家级精品课程。经过多年的教学实践，并根据教育部力学课程指导委员会组织讨论的教学基本要求和各专业的培养目标、培养计划，进行了从课程体系、教学内容到教学方法、教学手段等全方位的改革，现已形成了一个针对不同专业的、分层次的课程体系。例如，对于土木类的专业，根据其专业特点及后续课程的需求，强调静力学和材料力学部分的知识；而对于机电类的专业，则更加注重运动学、动力学等知识；对于其他短学时的课程，则着重于静力学和材料力学最基础的知识。同时，还从学生的实际情况出发，实行分级教学：A 级为优秀学生班级，重点培养拔尖人才；B 级为一般水平学生班级，教学要求比教育部颁布的基本要求稍高；C 级为基础及能力较差的学生班级，课程教学按教育部颁布的教学基本要求执行。

为了适应不同专业的需求，一般是编写不同的教材；而对于不同层次的分级教学，则主要由老师根据实际情况做出不同的取舍。针对这种情况，我们编写了这套适用于不同专业和层次的工程力学模块化的教材，共分为 4 册：第 1 册为《静力学》；第 2 册为《运动学和动力学》；第 3 册为《材料力学 I》，包括材料力学的基础部分内容；第 4 册为《材料力学 II》，包括材料力学的扩展内容。不管什么专业，只要是有力学教学的需要，都可以通过自行选择不同的分册来得到满足。例如，对于土木类可选择第 1~3 册和第 4 册部分内容；机电类可选择第 1~3 册；其他工科短学时可选择第 1, 3 册；数理学科的学生学习经典力学，则可选择第 1, 2 册。在每册中还可灵活取舍内容，根据学生对先修课程掌握的情况而进行分级教学。

除了上面提到的模块化特点以外，本套教材的编写还突出了以下特色。

(1) **由浅入深，不断强化。**每部分内容都采取由浅入深的讲述方式，便于自学和理解。但在后续讲述中会不断将前面内容系统化，并强调后续内容与先期内容的联系。

(2) **明确知识要点，加强知识点的联系。**工程力学中的知识点很多，虽然在解决实际的工程问题中最终都会起到作用，但学生在学习过程中对这些知识点的理解却是相对孤立的。因此，站在一定的高度，阐明各知识点之间的联系和最终其所发挥的作用，这将非常有利于学生真正掌握力学的思想和解决问题的能力。

(3) **从力学模型的建立和简化到直接的工程应用。**每部分内容都围绕“力引起物体的运动和变形”这一力学的核心思想，由浅入深地讲述从力学模型的建立、简化直至结果结论的工程应用。采取研究型教学的思想，先提出问题和要达到的目的，再讲述为达目的如何建立数学力学模型并简化。

(4) **强调力学与数学的联系。**包括力学模型的数学化、数学公式的力学图像解释和理解。

(5) **定量和定性分析相结合。**通过例题和习题，在定量分析结果的基础上尽可能总结出定性的结论，以帮助学生加强对力学概念的理解，以及获取直接的工程经验。

(6) **习题分级**。将习题分成三级：基本题、提高题、研究型题，以适应不同专业、不同层次的学生。

限于编者的水平，本套教材作为尝试，自然在某些方面会存在不足和疏漏，恳请有关专家、教师、学生随时提出批评和建议，以便我们改进和提高。

编者 (yswang@bjtu.edu.cn)

2011 年于北京交通大学

前 言

静力学是研究物体在力系作用下平衡的一门科学，涉及物体的受力分析方法、力系的简化方法，以及物体的受力平衡分析等，是动力学、变形固体力学、流体力学等所有力学分析的基础，也是一些相关的工程学科（如土木、机械、航空航天等）后续专业课程的基础。

为了使学生对力学学科有一个整体的了解和认识，本教材在第 1 章对力学的发展简史，学科分类，研究对象、内容、方法，以及理论力学的研究对象、内容、方法等进行了简单介绍。另外，还在这章讲述了力的数学描述。为了便于学生“循序渐进、由浅入深”地学习，本教材从第 2 章至第 4 章详细介绍了平面力系的相关知识，引入了静力学的大部分概念、定理和分析方法，而将空间力系的全部内容放在第 5 章介绍，第 6 章单独介绍摩擦的概念和相关的平衡分析。这样的安排可适应不同专业的要求，对于少学时的课程可以略去或简单介绍第 5、6 章的内容。

本教材内容的安排便于学生自学，同时也便于教师选择不同的方式教学。例如，对于基础好的学生，可以在讲授完第 1、2 章以后，直接进入第 5 章的空间力系，而将第 3、4 章的平面力系作为空间力系的特例介绍。

本教材第 1 章绪论由税国双完成初稿，汪越胜做了仔细的修改和补充，金明和徐丰提出了部分修改意见；第 2~6 章由金明完成初稿，其中税国双提供了部分资料，最后由汪越胜进行了内容调整和逐字逐句的修改完善；全书思考题和习题分别由税国双和金明提供，由汪越胜调整定稿，硕士生杨正辉、赵耀参与了习题整理。在编写过程中，参考了相关理论力学系列的教材，编者在此表示衷心感谢。

由于编者的水平所限，疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编 者

(mjjin@bjtu.edu.cn)

目 录

第 1 章 绪论	(1)
1.1 关于力学	(1)
1.2 力的概念和数学描述	(4)
1.3 理论力学的研究对象、内容和方法	(8)
思考题	(9)
习题	(9)
第 2 章 静力学公理与物体受力分析	(11)
2.1 静力学公理	(11)
2.2 约束和约束力	(15)
2.3 受力分析和受力图	(20)
本章小结	(26)
思考题	(27)
习题	(28)
第 3 章 平面简单力系	(32)
3.1 平面汇交力系	(32)
3.1.1 平面汇交力系合成与平衡分析的几何法	(32)
3.1.2 平面汇交力系合成与平衡分析的解析法	(34)
3.2 平面力对点的矩	(37)
3.3 平面力偶系	(38)
本章小结	(41)
思考题	(42)
习题	(43)
第 4 章 平面任意力系	(48)
4.1 平面任意力系的简化——主矢和主矩	(48)
4.2 平面任意力系的平衡分析	(55)
4.3 刚体系的平衡分析——静定和超静定问题	(60)
4.4 平面桁架的内力计算	(68)
本章小结	(75)
思考题	(76)
习题	(78)
第 5 章 空间力系	(86)
5.1 空间汇交力系	(86)
5.2 空间力偶系	(87)
5.2.1 空间力对点的矩和对轴的矩	(87)

5.2.2 空间力偶系的合成与平衡 (93)

5.3 空间任意力系的简化..... (99)

5.4 空间任意力系的平衡分析..... (103)

5.5 重心..... (112)

本章小结..... (119)

思考题..... (121)

习题..... (122)

第 6 章 摩擦..... (130)

6.1 静摩擦和滑动摩擦 (130)

6.2 摩擦角和自锁现象 (132)

6.3 考虑滑动摩擦时的平衡问题..... (133)

6.4 滚动摩阻的概念 (140)

本章小结..... (142)

思考题..... (143)

习题..... (144)

附录 A 习题参考答案..... (150)

参考文献..... (158)

1.1 关于力学

力学

自然界的物质有多种层次，从宇观的宇宙体系，宏观的天体和常规物体，细观的颗粒、纤维、晶体，到微观的分子、原子、基本粒子。力是这些物质间的一种相互作用，可引起物质机械运动状态的变化，而力学则是研究物质机械运动规律的科学。通常理解的力学以研究天然的对象及有关规律。机械运动亦即力学运动，是物质随时间在空间中的位置变化，包括移动、转动、流动、变形、振动、波动、扩散等，而静止则是其中的一种特殊情况。机械运动是最基本的物质运动形式。物质运动的其他形式还有热运动、电磁运动、原子及其内部的运动和化学运动等。机械运动并不能脱离其他运动形式独立存在，只是在研究力学问题时突出地考虑机械运动这种形式；如果其他运动形式对机械运动有较大的影响，或者需要考虑它们之间的相互作用，便会在力学同其他学科之间形成交叉学科或边缘学科。

力学发展简史

力学知识最早起源于对自然现象的观察和生产劳动中的经验。人们在建筑、灌溉等劳动中使用杠杆、斜面、汲水器具，逐渐积累起对平衡物体受力情况的认识。古希腊的阿基米德对杠杆平衡、物体重心位置、物体在水中受到的浮力等进行了系统的研究，确定了它们的基本规律，初步奠定了静力学即平衡理论的基础。古代人们还从对日、月运行的观察和弓箭、车轮等的使用中了解了一些简单的运动规律，如匀速的移动和转动等。但是对力和运动之间的关系，只是在欧洲文艺复兴时期以后才逐渐有了正确的认识。伽利略在实验研究和理论分析的基础上，最早阐明了自由落体运动的规律，提出了加速度的概念。牛顿继承和发展前人的研究成果（特别是开普勒的行星运动三定律），提出了物体运动三定律。伽利略和牛顿奠定了动力学的基础。

牛顿运动定律的建立是力学史上的第一个里程碑，标志着力学开始成为一门科学。此后，力学的进展在于它所考虑的对象由单个的自由质点转向受约束的质点和质点系，重要的进展包括：达朗贝尔提出了达朗贝尔原理和拉格朗日建立了分析力学；欧拉将牛顿运动定律推广，建立了刚体和理想流体的运动方程。欧拉建立的理想流体力学方程可看做是连续介质力学的肇端。在此以前，有关固体的弹性、流体的黏性、气体的可压缩性等物质属性方程已经陆续建立。运动定律和物性定律这两者的结合，促使弹性固体力学的基本理论和黏性流体力学的基本理论孳生于世，在这方面做出贡献的有纳维、柯西、泊松、斯托克斯等。弹性力学和流体力学基本方程的建立，使得力学逐渐脱离物理学而成为一门独立的学科。另一方面，从拉格朗日分析力学

基础上发展起来的哈密顿体系，继续在物理学中起作用。从牛顿到哈密顿的理论体系组成了物理学中的经典力学或牛顿力学。

从牛顿提出运动三定律到 19 世纪末，力学还是物理的一个主要内容，解释了许多自然规律。但经典力学上空的两朵乌云——“以太漂移”和“紫外灾难”，对力学提出了严峻的挑战。20 世纪初，相对论力学和量子力学的建立，突破了经典力学的局限，大大地推动了整个科学的发展。在相对论力学和量子力学成为力学发展史上第二个里程碑的同时，也使力学与物理学分道扬镳。物理学更关注微观世界的自然现象，而力学更关注宏观世界的自然现象。从此，力学进入近代发展历史阶段，形成了各个学科分支，开始更加注重与工程技术结合。这促使力学蓬勃发展起来，并创立了许多新的理论，同时也解决了工程技术中大量的关键性问题，如航空工程中的声障问题和航天工程中的热障问题。这种将理论和实际密切结合的力学先导者是普朗特和冯·卡门。他们在力学研究工作中善于从复杂的现象中洞察事物本质，又能寻找合适的解决问题的数学途径，逐渐形成一套特有的方法。特别是在第二次世界大战以后，力学与工程的结合更加密切，工程技术的飞速发展也大大促进了力学学科的迅猛发展。这一时期，陆续建立了许多重要的理论，其中边界层理论、断裂力学、非线性力学、计算力学等成为标志性成果。进入 21 世纪，力学呈现出新的发展趋势，如力学与数学结合更紧密，受工业发展的驱动力更强，向其他自然科学和工程科学的渗透更深入，分支学科更加丰富等。研究内容不再停留在宏观，而是更加强调宏-细-微-纳观相结合，开展跨尺度关联和多尺度分析；不再只限于对力场的分析，更强调力、电、磁、声、热、化学、生命等多场耦合的分析；超高温/高压/高速/爆炸/强冲击、微重力、稀薄气体等极端环境下的力学问题也成为关注的焦点。

力学在中国的发展经历了一个特殊的过程。与古希腊几乎同时，中国古代人们对平衡和简单的运动形式就已具备相当水平的力学知识，所不同的是未建立起像阿基米德那样的理论系统。在文艺复兴前的约一千年时间内，整个欧洲的科学技术进展缓慢，而中国科学技术的综合性成果堪称卓著，其中有些成果在当时居于世界领先地位。这些成果虽反映出丰富的力学知识，但却终未形成系统的力学理论。到明末清初，中国科学技术已显著落后于欧洲。经过曲折的过程，到 19 世纪中叶，牛顿力学才由欧洲传入中国。以后，中国力学的发展便随同世界潮流前进。

总之，经过几百年的发展，到了 21 世纪，关于力、运动和变形的力学，已经成为研究自然界和工程中复杂介质的宏/微观力学行为，揭示机械运动及其与物理、化学、生物学过程的相互作用规律的一门科学，是构成人类科学知识体系的重要组成部分。为人类认识自然现象（生命现象）、工程分析和设计提供理论和方法，对工程科学的发展具有重要的引领、支撑和推动作用。

力学的研究方法

科学研究遵循着从实践到理论再到实践的规律。即从对实验或实践的观察中总结规律，建立理论，然后再在实验或实践中检验，并指导实际工程。力学的研究和发展也同样遵循这个认识规律。首先，通过观察生活和生产实践中的各种现象，进行多次的科学实验，经过分析、综合和归纳，总结出力学的最基本的规律。例如，远在古代，人们为了提水，制造了辘轳；为了搬运重物，使用了杠杆、斜面和滑轮；为了利用风力和水力，制造了风车和水车，等等。制造和使用这些生活和生产工具，使人类对机械运动有了初步的认识，并积累了大量的经验，经过分析、综合和归纳，逐渐形成了如“力”、“力矩”等基本概念，以及“二力平衡”、“杠杆原理”、“万有引力定律”等基本规律。人们为了认识客观规律，不仅在生活和生产实践中进行观察和分析，还主动地进行实验，定量地测定机械运动中各因素之间的关系，找出其内在规律性。例如，伽利略对自由落体和物体在斜面上的运动做了多次实验，从而推翻了统治多年的错误观点，并

引出“加速度”的概念。再如摩擦定律、动力学三定律等，都是建立在大量实验基础之上的。因此，实验是形成理论的重要基础。

在对事物观察和实验的基础上，经过抽象建立力学模型，形成概念，在基本规律的基础上，经过逻辑推理和数学演绎，形成完整的理论体系。客观事物通常是具体的、复杂的，为找出其共同规律，必须抓住主要因素，舍弃次要因素，建立抽象的力学模型。例如，在进行受力平衡分析时，忽略一般物体的微小变形，建立形状不变的刚体模型；在分析不同物体间的相互作用时，根据物体间对相互机械运动限制的主要方面，建立一些理想的约束模型；为分析复杂的振动现象，建立弹簧-质点的力学模型等。这种抽象化、理想化的方法，一方面简化了所研究的问题，另一方面也更深刻地反映出事物的本质。当然，这些经大量简化假设的抽象模型是有适用条件的。当条件改变时，必须考虑影响事物的新的因素，并建立新的模型。例如，研究物体受力平衡时，可以采用刚体模型。但在分析物体内部的受力和变形时，不能采用刚体模型，应建立变形体模型。力学正是从少量由实验或实践中总结的最基本的规律出发，运用逻辑推理和数学演绎的方法，从多方面定量地揭示机械运动和变形规律，建立了严密而完整的理论体系。在这样一个发展过程中，数学起了重大的作用，没有数学的定量描述，力学就不会成为真正的科学。力学与数学在发展中始终相互推动，相互促进。一种力学理论往往和相应的一个数学分支相伴产生，如运动基本定律和微积分，运动方程的求解和常微分方程，弹性力学及流体力学的基本方程和数学分析理论，天体力学中运动稳定性和微分方程定性理论等。近代计算机的发展和普及进一步促进了力学与计算数学的结合，计算机不仅在完成力学问题中大量繁杂计算方面，而且也在逻辑推演、公式推导等方面提供了极为有效的工具。

所有的科学理论最终都是要服务于实践的。同时，也在解释世界、改造世界中不断地得到验证和发展。实践是检验真理的唯一标准，实践中所遇到的新问题又是促进理论发展的源泉。经典力学的理论在现实生活和工程中，被大量实践验证为正确，不仅用于指导生活生产实践，也在不同领域的实践中得到发展。但经典力学也在实践中遇到困难，正是对这些困难的克服大大促进了力学的发展，并形成新的学科分支。

力学学科性质

力学同数学、物理学、化学、天文学、地球科学、生命科学等学科一样，是一门基础科学，它所阐明的规律带有普遍性，肩负着探索自然界一般规律的任务。同时，力学又是许多工程技术的理论基础，虽不能代替工程学，但可以指出工程技术中解决力学问题的途径，为工程提供技术方法，甚至直接解决工程问题。当工程学还只分民用工程学（即土木工程学）和军事工程学两大分支时，力学就已在这两个分支中起着举足轻重的作用。随着社会的发展，工程学越分越细，各个分支中许多关键性的进展都有赖于力学中有关运动规律、强度、刚度等问题的解决。力学和工程学的结合促使工程力学各个分支的形成和发展。现在，无论是历史较久的土木建筑工程、水利工程、交通工程、机械工程、船舶工程等，还是后起的航空航天工程、核技术工程、生物医学工程、电子信息工程等，工程力学在其中都发挥重要的影响。而工程学则从更综合的角度考虑具体任务的完成。可见，力学同时为认识自然和改造自然做出了贡献。

力学的学科分类

力学按所研究对象区分为固体力学、流体力学和一般力学三个分支，流体包括液体和气体。固体力学和流体力学可统称为连续介质力学，它们通常采用连续介质的模型，研究物体的变形或流动规律。一般力学也称为动力学与控制，通常以质点、质点系、刚体、刚体系为研究对象，

也包括抽象的动力学系统。属于一般力学的有理论力学（狭义的）、分析力学、外弹道学、振动理论、刚体动力学、陀螺力学、运动稳定性等。属于固体力学的有早期形成的材料力学、结构力学，稍后形成的弹性力学、塑性力学，近期出现的散体力学、断裂力学等。流体力学是由早期的水力学和水动力学这两个风格迥异的分支汇合而成的，现在则有空气动力学、气体动力学、多相流体力学、渗流力学、非牛顿流体力学等分支。各分支学科间的交叉结果又产生黏弹性力学、黏塑性力学、流变学、气动弹性力学等。一般力学、固体力学和流体力学这三个主要分支在发展过程中又因对象或模型的不同而出现一些分支学科和研究领域。

力学也可按研究所采用的主要手段——理论分析、实验研究和数值计算划分。如实验力学，包括实验应力分析、振动实验、水动力学实验和空气动力实验等；随着电子计算机的出现而发展起来的计算力学包括计算固体力学、计算结构力学、计算流体力学等。当然，对一个具体的力学课题或研究项目，往往需要理论、实验和计算这三方面的相互配合。

力学在工程技术方面的应用结果形成工程力学或应用力学的各个分支，如土力学、岩石力学、爆炸力学、复合材料力学、工业流体力学、环境流体力学等。力学和其他基础科学的结合也产生一些交叉性的分支，最早的是和天文学结合产生的天体力学。在 20 世纪，特别是 20 世纪 60 年代以来，出现了更多的这类交叉分支，包括物理力学、物理-化学流体动力学、等离子体动力学、电流体动力学、磁流体力学、生物力学、生物流变学、地质力学、地球动力学、地球构造动力学、地球流体力学等。

1.2 力的概念和数学描述

力无疑是力学学科中最基本的概念。搞清楚力的概念和力的数学描述对力学的学习和研究至关重要。

力的概念

力（force）的概念是从劳动中产生的。人们在生活和生产中，由于肌肉紧张收缩的感觉，逐渐产生了对力的感性认识。随着生产的发展，又逐渐认识到物体机械运动状态的改变（包括变形），都是由于其他物体对该物体施加力的结果。这样，逐步由感性到理性，建立了抽象的力的概念。

力是物体间的机械相互作用，其作用效果使物体的机械运动状态发生改变。物体之间的机械作用大致可分为两类：一类是接触作用，如机车牵引车厢的拉力、物体之间的挤压力等；另一类是“场”对物体的作用，如地球引力场对物体的引力（重力）、电场对电荷的引力或斥力等。尽管各种物体间相互作用力的来源和性质不同，但力学只研究各种力对物体产生的效应，并不关心力的物理本质。力对物体的作用产生两个方面的效应：物体运动状态的改变和物体形状的改变。通常，把前者称为力的运动效应（effect of motion），后者称为力的变形效应（effect of deformation）。

实践表明，力对物体的作用效果应取决于：①力的大小；②力的方向；③力的作用点。以上三点称为力的三要素。

力的几何描述

可用一个带有箭头的线段来描述力所具有的三个要素，如图 1-1 所示。线段的长度按一定的比例尺表示力的大小，起始端代表力的作用点，箭头指向代表力的方向，线段所在的直线表示力的作用线。在数学上，这种带有箭头的线段用矢量描述：矢量的大小（模）表示力的大小，

矢量的方向表示力的方向，矢量的始端表示力的作用点（有时也用末端表示力的作用点）。通常将表示力的矢量称为**力矢**（force vector），用黑斜体字母 \boldsymbol{F} 或加矢量符号的字母 \vec{F} 表示，普通字母 F 则表示力的大小。若以 \boldsymbol{e} 表示沿力矢 \boldsymbol{F} 方向的单位矢量，则力矢 \boldsymbol{F} 可写成

$$\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{e} \quad (1-1)$$

即力矢可以用它的模和单位矢量的乘积表示。数学中矢量的运算同样适合于力矢的运算。但注意，由于力的作用点是指定的，所以力矢是**定点矢量**。

在国际单位制（SI）中，以“N”作为力的单位符号，称为牛或牛顿。有时也以“kN”作为力的单位符号，称为千牛或千牛顿。

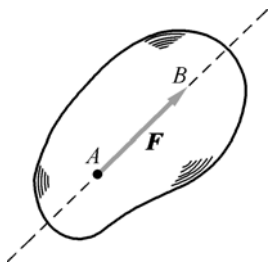


图 1-1 力的几何描述

力的解析描述

矢量可以在选定的坐标系中用其在坐标轴上的投影解析表示，同样可以用这种方法表示力矢。如图 1-2 所示，在直角坐标系中，力矢的投影表示式为

$$\boldsymbol{F} = iF_x + jF_y + kF_z \quad (1-2)$$

式中， $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别为沿 x, y, z 轴的单位矢量， F_x, F_y, F_z 分别为力矢在坐标轴 x, y, z 上的投影。

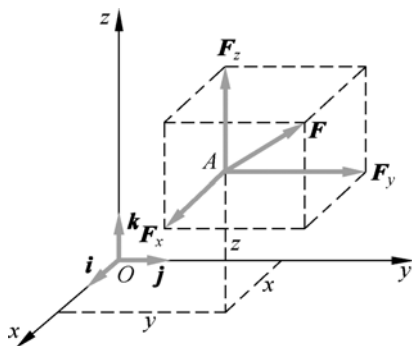


图 1-2 力的解析描述

若已知力 \boldsymbol{F} 与正交坐标系 $Oxyz$ 三坐标轴间的夹角分别为 α, β, γ ，如图 1-3(a)所示，则力在三个坐标轴上的投影等于力的大小 F 乘以力与各轴夹角的余弦，即

$$F_x = F \cos \alpha, \quad F_y = F \cos \beta, \quad F_z = F \cos \gamma \quad (1-3)$$

若力 \boldsymbol{F} 与 x, y 轴间的夹角不易确定，可把力 \boldsymbol{F} 先投影到坐标平面 Oxy 上，得到投影 F_{xy} ，然后再把 F_{xy} 向 x, y 轴投影，如图 1-3(b)所示。若已知夹角 γ 和 φ ，则力 \boldsymbol{F} 在三个坐标轴上的投影分别为

$$F_x = F \sin \gamma \cos \varphi, \quad F_y = F \sin \gamma \sin \varphi, \quad F_z = F \cos \gamma \quad (1-4)$$

此方法为二次投影法。

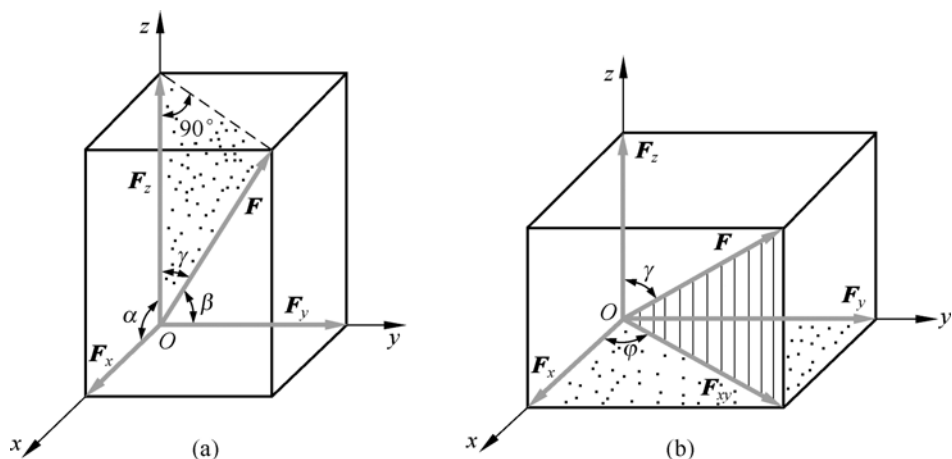


图 1-3 力在空间坐标系中的表示

如果已知力 F 在正交坐标系 $Oxyz$ 中坐标轴上的三个投影，则力 F 的大小和方向余弦为

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (1-5)$$

$$\cos(F, i) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(F, j) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(F, k) = \frac{F_z}{F} \quad (1-6)$$

例题 1-1

如例题图 1-1 所示，在正方体的角点 A, B 处作用力 F_1, F_2 ，大小均为 F 。试求此二力在 x, y, z 轴上的投影。

解：

(1) 对力 F_1 使用二次投影法。设 F_1 与 xy 面的夹角为 α ，其余弦值和正弦值分别为

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

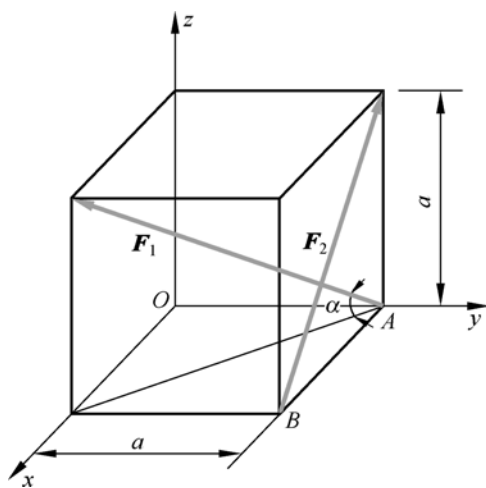
其中， a 为正方体的边长。 F_1 在 xy 面上的投影为

$$F_{xy} = F \cos \alpha = F \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

于是，由式(1-4)得力 F_1 在 x, y, z 上的投影分别为

$$F_x = F_{xy} \cos 45^\circ = F \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{F}{\sqrt{3}}$$

$$F_y = -F_{xy} \cos 45^\circ = -F \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{F}{\sqrt{3}}$$



例题图 1-1

$$F_z = F \sin \alpha = \frac{F}{\sqrt{3}}$$

(2) 对力 F_2 使用直接投影法。由式(1-3)得 F_2 在 x, y, z 上的投影分别为

$$F_x = -F \cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}F}{2}$$

$$F_y = 0$$

$$F_z = F \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}F}{2}$$

例题 1-2

已知力在直角坐标系中的解析式为 $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ kN, 试求这个力的大小和方向, 并作图表示。

解:

根据题意, $F_x = 3, F_y = 4, F_z = -5$, 所以由式(1-5)和式(1-6)得

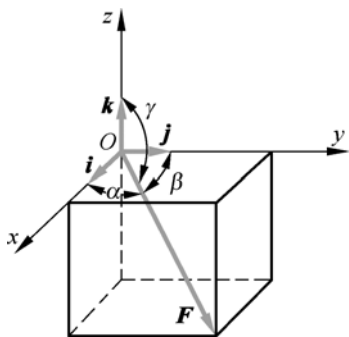
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\cos(\mathbf{F}, \mathbf{i}) = \frac{3}{5\sqrt{2}} = 0.4243, \quad \cos(\mathbf{F}, \mathbf{j}) = \frac{4}{5\sqrt{2}} = 0.5657, \quad \cos(\mathbf{F}, \mathbf{k}) = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -0.7071$$

于是, 角度为

$$(\mathbf{F}, \mathbf{i}) = \alpha = 64.9^\circ, \quad (\mathbf{F}, \mathbf{j}) = \beta = 55.55^\circ, \quad (\mathbf{F}, \mathbf{k}) = \gamma = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

如例题图 1-2 所示。



例题图 1-2

实际物体的受力往往是由多个力组成的复杂系统, 称为力系 (system of forces)。根据各力的作用线和作用点所在空间的分布特点, 通常将力系分为平面力系和空间力系, 其中又分为汇交力系、力偶系、平行力系和一般任意力系。但不论多么复杂的力系, 其分析计算都以上述关于力的数学表述为基础。

1.3 理论力学的研究对象、内容和方法

研究对象

理论力学研究物体机械运动的一般性规律。机械运动是指物体在空间的位置随时间的改变，是人们生活和生产实践中最常见的一种运动。为了简化分析，理论力学忽略物体的变形，根据问题的需要，将实际的物体简化为**质点**（particle）或**质点系**（system of particles）模型。所谓质点是指只有质量而没有形状和体积的数学意义上的点，质点系则指有限多个或无限个这样的点的集合。质点系中质点的分布可以是离散的，也可以是连续的。后一种情况就形成占据空间一定体积的连续物体。实际上这样的物体在受力时，其内部各点间的相对距离都要发生改变，这种改变称为**位移**（displacement）；各点位移累加的结果，就导致物体形状和体积的改变，即变形。当理论力学研究物体的受力和运动时，为了使分析简化，可忽略这种变形，即假设物体内部任意两点之间的距离始终保持不变。这样的物体称为**刚体**（rigid body）。质点、质点系，特别是作为特殊质点系的刚体和刚体系是理论力学研究的主要对象。

刚体是一个理想化的力学模型，是为了简化问题的分析过程而抽象出来的。例如，图 1-4 所示的吊车梁，其弯曲变形 δ 一般不超过跨度（ A, B 间距离）的 $1/500$ ，水平方向变形更小。因此，研究吊车梁的平衡规律时，变形是次要因素，可略去不计，从而将吊车梁当做刚体处理。

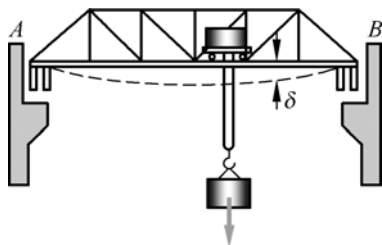


图 1-4 平衡分析时将吊车梁当做刚体

不能把刚体的概念绝对化。例如，在研究飞机的平衡问题或飞行规律时，我们可以把飞机看做刚体；但是在研究飞机的颤振问题时，机翼等的变形虽然非常微小，但必须把飞机看做变形体。还有，在计算某些工程结构时，如果不考虑它们的变形，而仍使用刚体的概念，可能无法求解。

研究内容和目的

理论力学的研究内容包括三个部分：**静力学**（statics）、**运动学**（kinematics）和**动力学**（kinetics）。其中，静力学主要研究物体的受力分析、力系的简化、物体受力平衡时作用力所应满足的条件。运动学从几何学的角度来研究物体的运动（如运动轨迹、速度和加速度等），不涉及引起物体运动的物理原因。动力学则研究受力物体的运动与作用力之间的关系。

理论力学是一门理论性较强的技术基础课。工程中有许多与机械运动有关的问题可以直接应用理论力学的基本理论去解决；比较复杂的问题则需要用理论力学和其他专门知识共同来解

决。所以,学习理论力学不仅为解决工程问题打下一定的基础,而且很多工程专业的课程,例如材料力学、弹塑性力学、流体力学、断裂力学、振动理论、机械原理、机械设计、结构力学、结构设计、飞行力学等课程,都要以理论力学为基础,所以理论力学是学习所有力学后续课程以及相关工程课程的重要基础。

研究方法

理论力学作为力学的一个学科分支,同样也是通过观察生活和生产实践中的各种现象,进行多次的科学实验,经过分析、综合和归纳,总结出最基本的规律。然后,经过抽象建立模型,形成概念,在基本规律的基础上,经过逻辑推理和数学演绎,建立理论体系。最后,将理论用于实践,在解释世界、改造世界中不断得到验证和发展。

理论力学成功地运用逻辑推理和数学演绎的方法,由少量最基本的规律出发,得到了从多方面揭示机械运动规律的定理、定律和公式,建立了严密而完整的理论体系。因此,充分理解理论力学的研究方法,不仅可以深入地掌握这门学科,而且有助于学习其他科学技术理论,培养分析问题和解决问题的能力,为今后解决生产实际问题,从事科学研究工作打下基础。

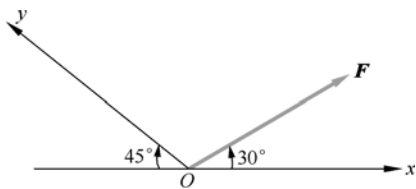
思考题

- 1-1 从力学的发展史看,实验观察和数学推演对力学理论体系的建立分别起到了什么样的作用?
- 1-2 你能从工程和身边的生活中举出应用力学知识的实例吗?
- 1-3 为什么力可以用矢量描述? 矢量有哪些特征和运算法则?
- 1-4 理论力学的研究对象是什么? 从研究内容上看,与大学物理中所学的力学有什么联系和区别?

习 题

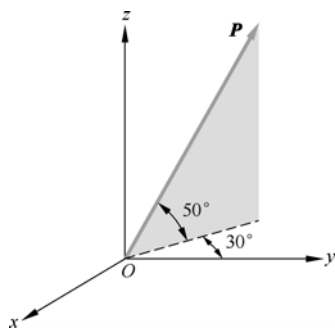
基本题

- 1-1 如习题图 1-1 所示,已知 $F = 100 \text{ N}$,若将 F 沿图示 x, y 方向分解,则 x, y 方向分力的大小分别为多少?

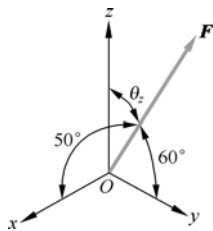


习题图 1-1

- 1-2 如习题图 1-2 所示,力 P 的大小为 30 N ,写出该力在直角坐标系中的解析表达式。
- 1-3 如习题图 1-3 所示,力 F 的大小为 240 N ,试计算 F 与 z 轴的夹角 θ_z ,并写出 F 在直角坐标系中的解析表达式。

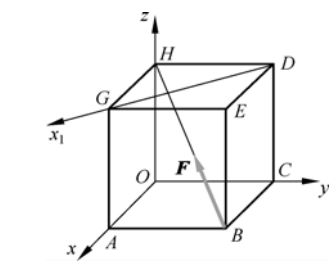


习题图 1-2



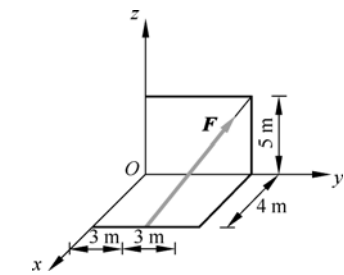
习题图 1-3

1-4 如习题图 1-4 所示，正方体各边长为 a ，沿对角线 BH 作用一个力 F ，则该力在 x_1 轴上的投影是多少？



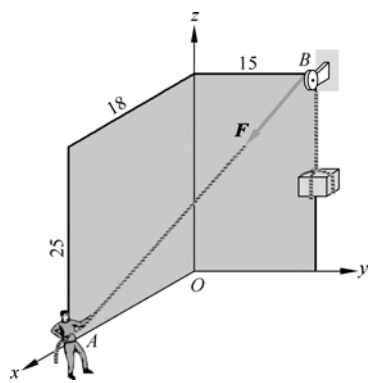
习题图 1-4

1-5 如习题图 1-5 所示，已知 $F = 100\text{ N}$ ，则该力在三个坐标轴上的投影是多少？



习题图 1-5

1-6 如习题图 1-6 所示，力 F 的大小为 120 N ，图中几何尺寸的单位为 m 。试写出该力在直角坐标系中的解析表达式。



习题图 1-6

第 2 章

静力学公理与物体受力分析

2.1 静力学公理

在静力学中，力系的简化规则、最基本的平衡条件、力系效果的等价原理、物体之间的相互作用力关系、刚体和刚体系的平衡条件及变形体的平衡条件，经人们长期实践与反复验证，总结为下列五条公理，称为**静力学公理**（axiom of statics）。这些公理所揭示的规律不能由其他方法（如逻辑推理的方法）而得到，是人们在生活和生产实践中长期积累的经验总结，又经过实践反复检验，被确认是符合客观实际的最普遍、最一般的规律。

公理 1：力的平行四边形法则（parallelogram law） 作用于刚体上同一点的两个力可以用一个力等效，这个力称为合力（resultant of forces）。这个合力仍作用于该点，其合力矢等于这两个力矢的矢量和。

公理 1 即力的合成与分解的运算规则，它说明力的合成与分解服从矢量加减的平行四边形法则，如图 2-1(a)所示， $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}$ 。将 \mathbf{F}_2 平移后，得到力三角形，如图 2-1(b)所示，这是求合力矢的三角形法则（triangle rule）。由此也可求两力之差，即 $\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1 + (-\mathbf{F}_2) = \mathbf{F}'$ ，如图 2-1(c)所示。

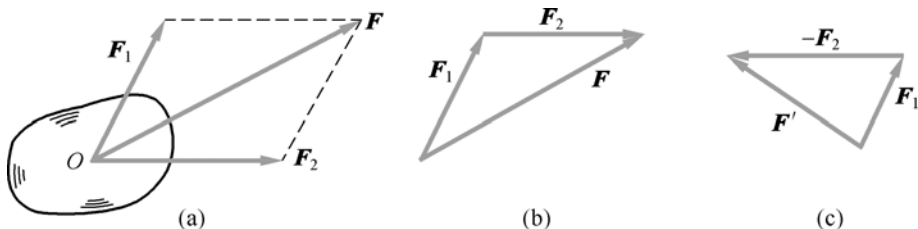


图 2-1 力的相加与相减

若求图 2-2(a)中所示 n 个共点力之和，即

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (2-1)$$

可由矢量求和的多边形法则，得力多边形（polygon of forces），如图 2-2(b)所示，其中， \mathbf{F}_R 为合力矢， O 为合力作用点。公理 1 给出了力系最基本的简化规则。

注意：利用力多边形法求合力，仅适用于力的作用线交于一点的几个力，且合力作用点仍在原力系作用线的汇交点。

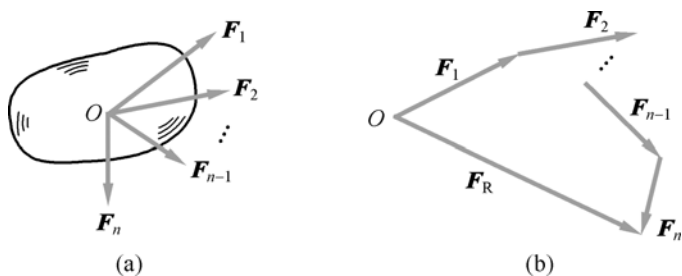


图 2-2 作用线汇交于一点的多个力的合成

公理 2：二力平衡条件 作用在同一刚体上的两个力，使这个刚体平衡的必要且充分的条件是，此二力等值、反向、共线。

注意：一对平衡力的作用点可以是同一个点、也可以是不同的两个点。

这个公理表明了作用于刚体上的最简单的力系平衡时所必须满足的条件。应用该公理，可确定某些未知力的方向或作用线的方位。如图 2-3(a)所示，直杆 AD 和折杆 BC 相接触，在力 F 作用下处于静止，若不计自重，则 BC 构件仅在 B, C 两点处受力而平衡，故此二力等值、反向、共线，必沿 BC 连线方位，如图 2-3(b)所示。这种仅受二力作用而处于平衡的构件称为二力构件或二力杆 (two-force rod)。

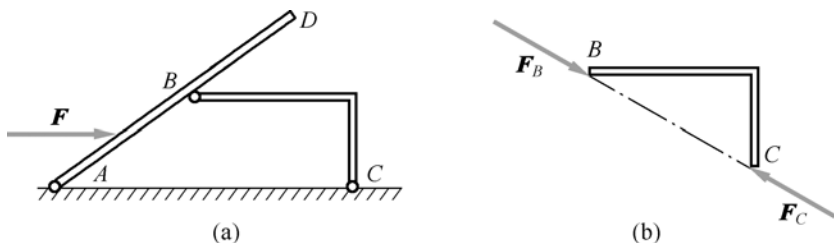


图 2-3 二力构件

公理 3：加减平衡力系原理 在已知力系上加上或减去任意一个平衡力系 (balance force system)，并不改变原力系对刚体的作用效果。

它是力系替换与简化的等效原理 (principle of equivalence)。

注意：在物体上加减一个平衡力系，必然引起力对物体内部效应的改变，因此，在涉及内力和变形的问题中，公理 3 不适用。例如，若在图 2-3(a)中加一对平衡力 F_1 和 F_1' ，如图 2-4(a)所示，则整体仍处于平衡状态，但却改变了 B 处的内力（即杆 AD 与杆 BC 的相互作用力），也改变了点 C 和点 A 处的作用力，因为显然此时 BC 不再是二力杆。

又如在图 2-4(b)中，杆先在 B 处受力 F ，然后在 B, C 两处加一对平衡力 F_1 和 F_1' ，则 A 端所受外力不变， AB 段内力（即将 AB 段沿横截面截开后，左右两边的相互作用力）不变，但 BC 段的内力与变形均有改变。

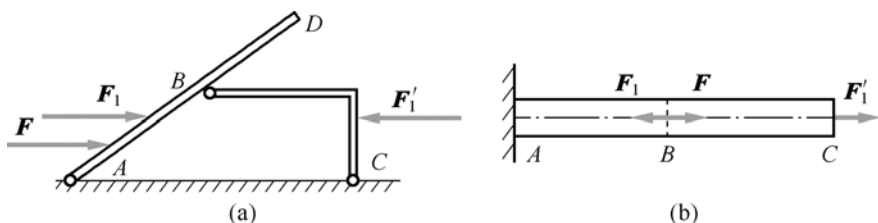


图 2-4 加减平衡力系原理不适用的情形

由公理 3，可以得到如下两个推论。

推论 1：力的可传性 (transmissibility of forces) 作用在刚体上某点的力，可以沿着它的作用线滑移到刚体内任意点，并不改变该力对刚体的作用效果。

证明：如图 2-5(a)所示的刚体，在点 A 承受力 F ，若先在点 B 处加一对平衡力 (F_1, F_2) ，其中 $F_1 = F_2 = F$ ，然后减去一对平衡力 (F, F_1) ，如图 2-5(b)所示，可得到如图 2-5(c)所示的结果。即力 F 可由点 A 沿作用线移至点 B 。

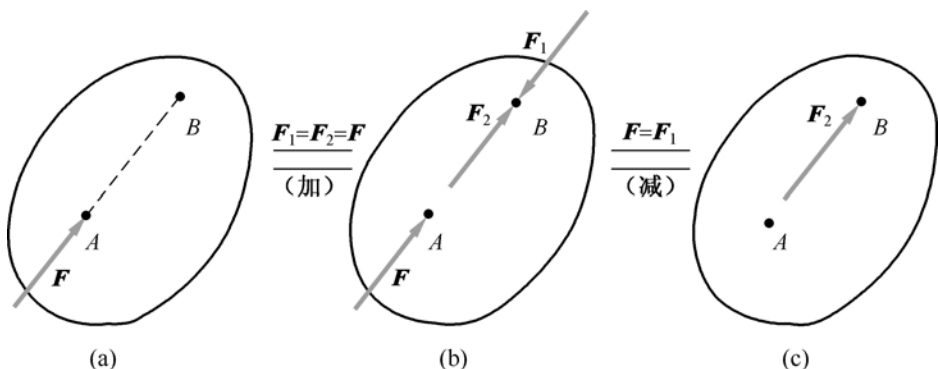


图 2-5 力的可传性

可见，对刚体来说，力是**滑移矢量 (sliding vector)**。所以，对刚体来说，力的三要素为力的大小、方向和作用线，而不必再提力的作用点。

需要指出的是，力的可传性与公理 3 同样，只限于研究力的外效应。当研究外力对物体的内效应时，力不具有可传性。例如，对于图 2-3(a)所示的结构，若研究点 B 处的作用力，则对构件 AD 和构件 BC 组成的整个系统来说，点 B 处的作用力是内力，是外力对整个系统的内效应，所以，不可将力 F 滑移到杆 BC 上。显然，若将力 F 滑移到杆 BC 上，点 B 处作用力将发生改变。再如图 2-4(b)所示，若将杆 C 端力 F'_1 移至点 B 处，则 BC 段的内力与变形也会随之消失。

又如图 2-6 所示，当研究用绳拉住的杆 AB 受力时，重力 G 不能直接移到杆 AB 上。

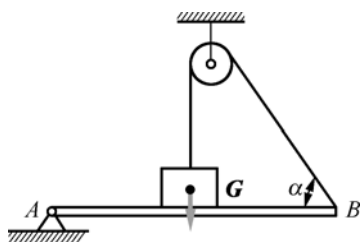


图 2-6 重力 G 不可移至杆 AB 上

推论 2：三力平衡汇交定理 (principle of three force balance) 若刚体受三力作用而平衡，且其中两力线相交，则此三力共面且汇交于一点。

证明：如图 2-7 所示的刚体受力 F_1, F_2, F_3 作用而处于平衡。先将力 F_1, F_2 滑移至交点 O ，并合成为力 F ，则 F_3 与 F 二力平衡，根据公理 2， F_3 与 F 共线，故 F_3 与 F_1, F_2 共面，且交于同一点 O 。

该定理说明了三个不相互平行的力平衡时的必要条件，容易推广到更一般的情形：刚体受 n 个力作用而平衡，若其中 $n-1$ 个力交于同一点，则第 n 个力的作用线必过此点，但这几个力不一定共面（请读者自己证明）。

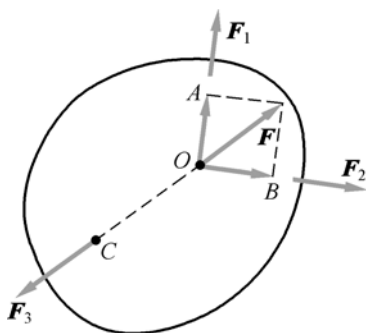


图 2-7 三力平衡汇交

公理 4：作用与反作用定律（principle of action and reaction） 两个物体间的相互作用力总是成对出现的，且等值、反向、共线，分别称为作用力与反作用力。

特别要注意的是，作用力与反作用力虽等值、反向、共线，但这两个力分别作用在两个不同的物体上，所以并不构成平衡力系，或者说不存在作用力与反作用力是否平衡一说。这是与二力平衡公理的本质区别。

公理 4 是研究两个或两个以上物体系统平衡的基础。

在图 2-3 中，画出了构件 BC 的受力图后，当再画杆 AB 受力图时，点 B 处的反作用力 F'_B 必须与 F_B 等值、反向、共线，而 F_A 可由三力汇交确定方向或作用线方位，如图 2-8 所示。

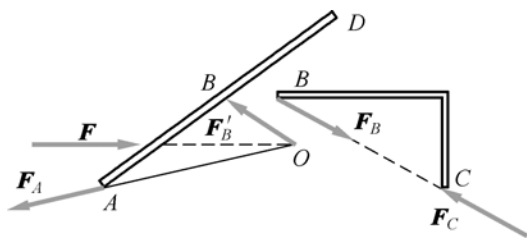


图 2-8 作用力与反作用力

公理 5：刚化原理（stiffening principle） 若一个“物体”在某一力系作用下处于平衡状态，则将此物体“刚化”后，看成刚体，在同一力系作用下，其平衡状态不变。

这里的“物体”是一个广泛的概念，它可以是不可变形的物体，如刚体这种理想化的物体；也可以是可变形的物体，如弹簧、水、空气等。这里的“物体”可以是一个物体、也可以是多个物体组成的物体系统，如房屋、桥梁、机车等。“刚化”是指，在保持这个“物体”的几何形状和空间位置不变的前提下，将这个“物体”看成整个一块刚体。

刚化原理建立了刚体平衡条件与变形体平衡的联系，提供了用刚体模型研究变形体平衡的依据。但需注意：刚体平衡条件对变形体来说必要而非充分。如图 2-9 所示的刚体受压平衡，相应的变形体（软绳）受同样压力却不平衡。

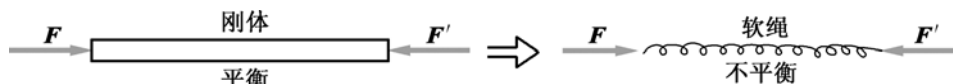


图 2-9 刚体和变形体平衡的区别

还应指出，对于钢材、混凝土等材料，在正常承载的情况下变形都很小，对于这些变形很

小的物体，均在未变形状状态下对变形体进行“刚化”，分析其受力平衡。这样做，既简化了计算，也符合工程精度的要求，是非常实用的处理方法。如图 2-10 所示，求力 F_B 的大小时，将直杆 AB 刚化，不计水平微小位移 Δ 以及 Δ_1, Δ_2 的影响。

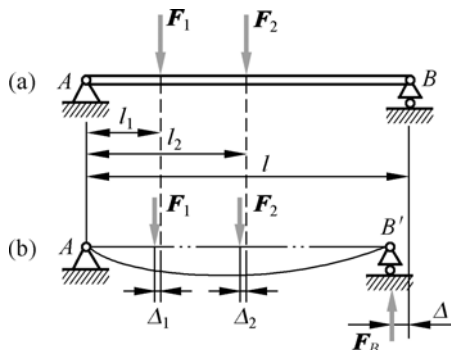


图 2-10 按受力变形前的形状分析外力 and 约束力

以上五个公理奠定了静力学的全部理论基础。

2.2 约束和约束力

有些物体，如飞行中的飞机、鸟等，在空间的位移不受任何限制，称为**自由体**（free body）。相反，有些物体在空间的位移却要受到一定的限制，如火车运行受到轨道的限制，桥梁受到桥墩的制约等，这类物体称为**非自由体**或**受约束体**（constrained body）。工程结构或构件一般都受到周围物体对它运动的限制，这些限制结构或构件自由运动的物体称为**约束**（constraint），约束对构件的机械作用（即作用力）称为**约束力**（constraint force）。根据力学原理确定约束力是静力学的基本任务之一。

各类约束的约束力特点是通过分析约束在接触处对物体位移的阻碍作用，并经合理简化而确定的。约束力的方向与所阻碍位移的方向相反，但大小未知，需要根据后面将讲述的静力平衡条件或动力学理论求解。

物体之间的约束力是由物体之间的连接方式决定的，但物体之间的连接方式复杂多样。为了既能反映约束的主要特点，又能保证具有足够的精度，需要将这些约束理想化。下面是常见的几种理想约束及相应的约束力。

1. 理想刚性约束（ideal rigid constraint）

当物体变形可以忽略时，约束与被约束体之间的接触可假设为刚性，如果不计摩擦，则称为理想刚性约束，常见的有以下几种。

1) 光滑接触面

当物体与固定约束 [图 2-11(a)] 或活动约束 [图 2-11(b)] 间的接触表面非常光滑，摩擦可以忽略不计时，就可简化为光滑面约束。约束只能阻碍物体沿两个接触面法线方向指向约束内部的运动，不能阻碍沿切线方向的运动。因此，光滑面约束力作用在接触点处，沿两个接触面公法线方向（当角点与表面接触时，如图 2-11(a) 中点 C ，则沿该表面过接触点的法线方向），并指向受力物体，光滑面对物体的这种约束力称为**法向约束力**（normal constraint force），记为 F_N 。实际中，支撑物体的表面、齿轮的齿面等都属于这类约束。注意角点与角点的接触不在考虑之内。

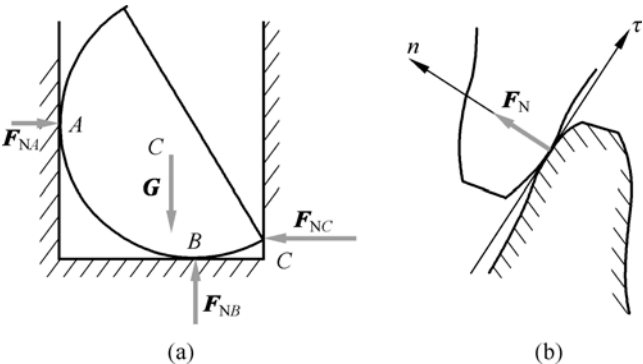


图 2-11 光滑面约束

2) 光滑圆柱铰链 (hinge) 约束

用光滑圆柱销钉和圆孔组成的局部结构，称为光滑圆柱铰链，简称柱铰，是光滑铰链的一种，如图 2-12(a)所示。忽略摩擦，销钉表面与圆柱孔表面间的接触是光滑表面接触，而且是刚性接触，所以光滑铰链是一种刚性约束。光滑面约束力作用在接触点处，沿两个接触面公法线方向，过销钉和圆孔的中心，如图 2-12(b)所示。当圆孔与销钉的接触点位置不能事先确定时，通常用两个正交分力表示其约束力，如图 2-12(c)所示。这些分力的指向可事先任意假定，最后由计算结果的正负确定实际指向。显然，光滑铰链只能限制物体平行移动，不能阻碍转动。

工程中，铰链约束又分为：①由销钉将两个钻有同样大小孔的构件连接在一起的中间铰链 (middle hinge)，如图 2-12 所示的结构。②铰链连接体中有一个为地面或固定机架时的固定铰支座 (fixed hinged bearing)，固定铰支座的约束力仍可以两个正交分力表示。如图 2-13(a)所示的拱形桥结构，两个拱形构件通过中间铰链 C 链接，同时通过 A、B 处的固定铰支座固定，其结构简图如图 2-13(b)所示，圆柱铰链 C 及固定铰链支座 A 和 B 的约束力如图 2-13(c)所示。

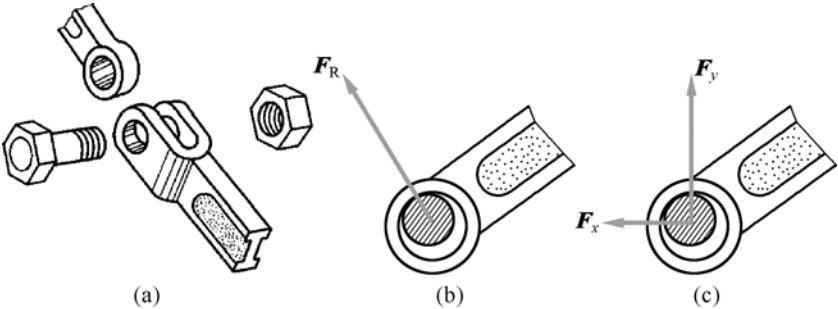


图 2-12 光滑圆柱铰链约束和约束力

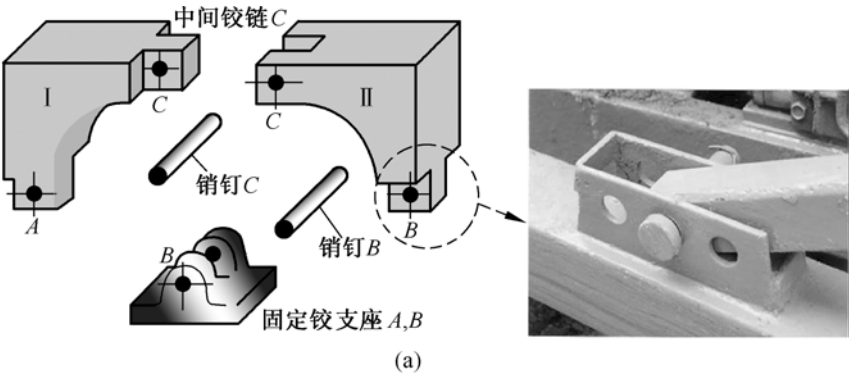


图 2-13 拱形桥结构的简图和约束力

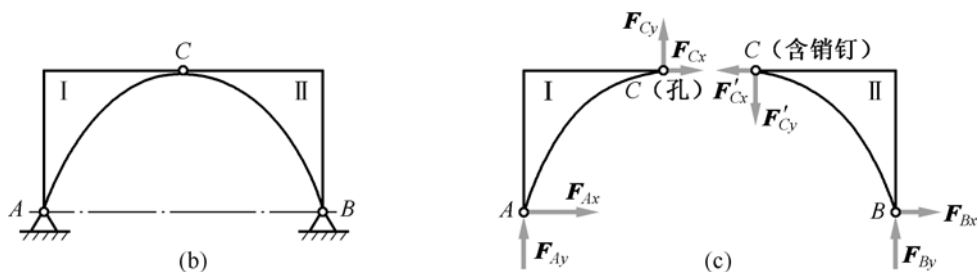


图 2-13 拱形桥结构的简图和约束力 (续)

在分析铰链约束力时，一般可假设销钉固定在其中的任意一个构件上，如图 2-13(c)所示，假设销钉 C 固连在构件 BC 上。只有当需要分析销钉 C 的受力时，才把销钉分离出来单独研究。这时，销钉 C 将同时受到构件 AC 和 BC 上的孔对它的作用力。

3) 活动铰支座 (movable hinge bearing) 约束

在固定铰支座底部安装一排光滑滚轮时得到的约束形式称为活动铰支座，也称辊轴支座，其简图通常有如图 2-14(b)所示的三种表示形式，约束力只有法向力 F_{Ay} 。

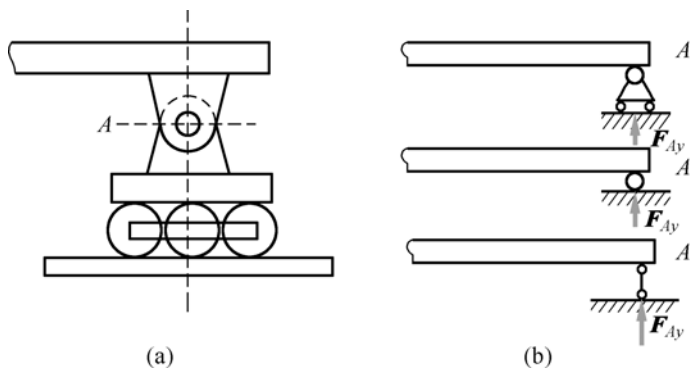


图 2-14 活动铰支座及其受力简图

以上光滑圆柱铰链和活动铰支座是工程中常用的两种约束形式。图 2-15(a)所示的是钢筋混凝土屋架与柱子相连接的实际结构，两个构件外伸的钢筋头要先搭接或点焊，再浇上混凝土；图 2-15(b)为其简化的约束形式，左端为固定铰支座，这是因为上述连接的转动阻力（阻力矩）较小；右端为活动铰支座，表示屋架可沿跨度伸缩（如由温度变化引起）。这样简化，不但符合实际约束情形，也便于计算。所以，通常将工程结构中的许多铆接点和焊接点简化为铰接点。

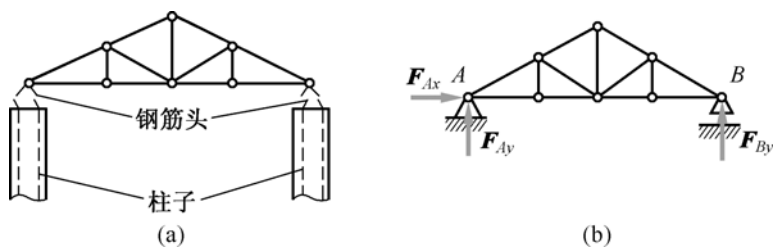


图 2-15 屋架的约束简化及受力简图

同样，机械工程中的许多径向轴承（radial bearings）也可简化为光滑铰链，如图 2-16 所示。

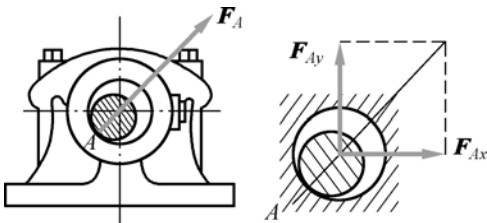


图 2-16 径向轴承及受力简图

4) 止推轴承（thrust roller bearing）约束

止推轴承与径向轴承不同，它除了能限制轴的径向位移以外，还能限制轴沿轴向的位移，如图 2-17(a)所示。因此，它比径向轴承多一个沿轴向的约束力，即其约束反力有三个正交分量 F_x, F_y, F_z 。止推轴承的简图及其约束反力如图 2-17(b)、(c)所示。

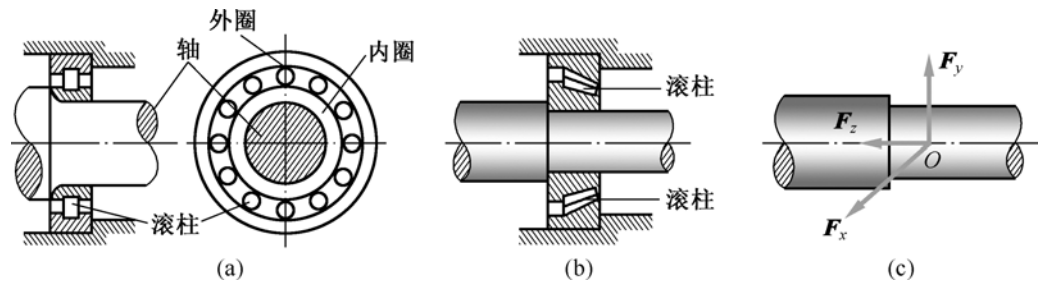


图 2-17 止推轴承及受力简图

5) 光滑球形铰链（spherical hinge）约束

通过圆球和球壳将两个构件连接在一起的约束称为球形铰链，可以理解为光滑铰链的空间形式。如图 2-18(a)所示，其一方为球头，另一方为相应的球窝。如汽车上换挡用的变速操纵杆与车体的连接方式、收音机的拉杆天线与收音机的连接方式等便可视作这类约束。球形铰链的简图如图 2-18(b)所示，约束力可简化为通过球心 O ，大小和方向待定的三个分力，如图 2-18(c)所示。

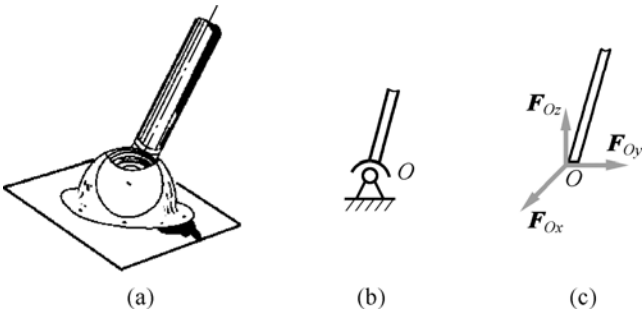


图 2-18 球形链铰及简图和约束力

2. 理想柔性约束（ideal flexible constraints）

理想化的柔索是十分柔软而又不可伸长的“绳子”，它仅限制被约束体沿使柔索伸长的方向运动，因而其约束力沿柔索只为拉力。实际中的绳子、胶带、链条、钢索等虽不是理想化

的柔索，但可简化成这种约束。如图 2-19(a)所示的胶带轮，假想地切开其胶带，由于它是被预拉后套在两个胶带轮上的，所以，无论在胶带的紧边上，还是松边上，所受力都是拉力，如图 2-19(b)所示。

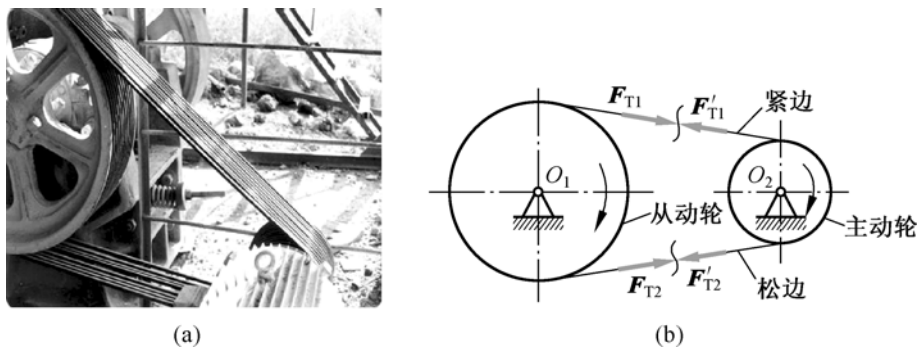


图 2-19 胶带约束及约束力

工程中的许多约束都可以简化为理想柔索，如图 2-20 所示的斜拉桥的钢索、自行车的链条等。



图 2-20 工程中常见的柔性约束

3. 弹性（elastic foundation）约束

如图 2-21(a)所示的梁 AB ，其 A 和 B 两端的支承若刚性不够，则可视作弹簧支承。由于弹簧受力会伸缩，所以两端的约束力与梁在两端的沉陷位移 w_A, w_B 有关，最简单的是线性关系： $F_A = -kw_A, F_B = -kw_B$ ，其中 k 称为弹性系数。更常见的是放在弹性基础上的梁，如图 2-21(b)所示。实际中，枕木或基础对钢轨的约束就可以简化为弹性基础约束。

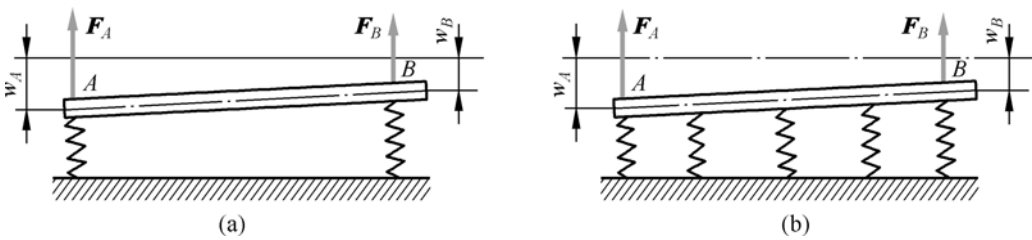


图 2-21 一种弹性基础约束

工程结构中的约束形式多种多样,大多可简化为上述几种情形。对于其他约束形式,可根据约束对位移的限制性质及力系的简化原理,来判断其约束力的形式。在以后的章节中,若有涉及,再进行介绍。

2.3 受力分析和受力图

工程中物体的受力可分为两类:一类称为主动力(active force),如工作载荷、构件自重、风力等,这类力一般是已知的或可以测量的;另一类就是约束力,约束力的大小事先是未知的,对某些约束力的实际指向事先也是未知的。当然,约束力是由主动力和物体的运动状态决定的。

工程实际中,为了求解未知约束力,需要根据物体上已知的主动力,利用平衡条件进行分析。为此应首先确定物体上所受的全部力有几个?各自的作用点和作用线方位如何?这样的分析过程就是受力分析(force analysis)。

对工程结构进行受力分析时,首先要根据求解问题的需要,选定其中某个构件或某几个构件的组合物体作为研究对象,把它们从周围约束中分离出来,画出其轮廓简图,这种解除约束后的研究对象称为分离体(free-body),这个过程则称为取分离体或取自由体。在分离体上画出全部主动力,然后在解除约束处画上相应的约束力,便得到用图表示的物体的受力情况。这种表示物体受力情况的简图称为受力图(free-body diagram)。画物体受力图不仅是求解静力学问题的第一个步骤,也是求解其他力学问题的第一个步骤。所以说,正确地画出受力图是分析、解决力学问题的前提。

以下举例说明如何进行受力分析并画出受力图。如果没有特别说明,一般情况下,不计物体的重力,并认为接触面都是光滑的。

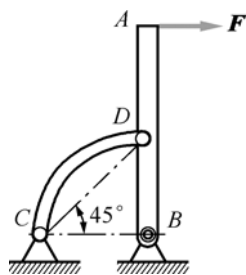
例题 2-1

画出例题图 2-1(a)所示结构中构件 AB 的受力图。

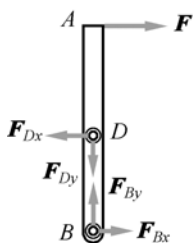
解:

(1) 取构件 AB 为研究对象,根据 B、D 处铰链约束的性质,可画出构件 AB 的受力,如例题图 2-1(b)所示,其中由于约束力方向未知,以相互垂直的分力表示。但若考虑杆 CD 的受力特点,还可进一步进行如下分析。

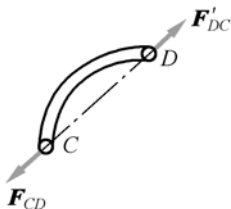
(2) 注意到 CD 为二力构件,所以,作用力 F_{CD} 和 F'_{DC} 应沿 C、D 两点的连线。根据作用力和反作用力的关系,可知 F_{Dx} 和 F_{Dy} 应合成 F_{DC} (它是 F'_{DC} 的反作用力),于是可画出如例题图 2-1(d)所示的受力图。



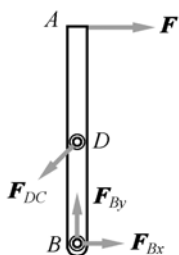
例题图 2-1(a)



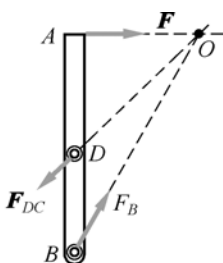
(b)



(c)



(d)



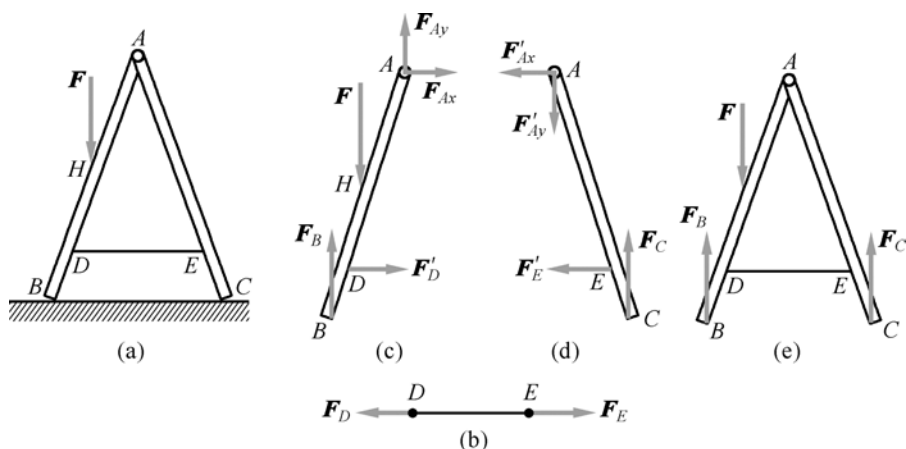
(e)

例题图 2-1

(3) 实际上, 杆 AB 在 A, B, D 三点受三个力的作用, 由三力平衡汇交定理知, 这三个力的作用线必汇交于一点 O , 于是可画出如例题图 2-1(e) 所示的受力图。

例题 2-2

如例题图 2-2 所示, 梯子的两部分 AB 和 AC 在点 A 铰接, 又在 D, E 两点用水平绳连接。梯子放在光滑水平面上, 若其自重不计, 但在 AB 的中点 H 处作用一铅垂载荷 P 。试分别画出绳子 DE 和梯子的 AB, AC 部分及整个系统的受力图。



例题图 2-2

解:

(1) 绳子 DE 的受力分析。

由于绳子是柔性构件, 只能受拉, 而不能受压, 所以其两端 D, E 分别受到梯子对它的拉力 F_D 和 F_E 的作用, 如例题图 2-2(b) 所示。

(2) 梯子 AB 部分的受力分析。

它在 H 处受载荷 P 的作用, 在铰链 A 处受 AC 部分给它的约束力, 方向未知, 以两个相互垂直的分力 F_{Ax} 和 F_{Ay} 表示。在点 D 受绳子对它的拉力 F'_D (与 F_D 互为作用力和反作用力)。在点 B 受光滑地面对它的法向约束力 F_B 的作用。梯子 AB 部分的受力图如例题图 2-2(c) 所示。

(3) 梯子 AC 部分的受力分析。

在铰链 A 处受 AB 部分对它的作用力为 F'_{Ax} 和 F'_{Ay} (分别为 F_{Ax} 和 F_{Ay} 的反作用力)。在点 E 受绳子对它的拉力 F'_E (为 F_E 的反作用力)。在 C 处受光滑地面对它的法向约束力 F_C 。梯子 AC 部分的受力图如例题图 2-2(d) 所示。

若考虑三力汇交平衡定理, 可进一步确定点 A 的受力方向, 请读者自己分析。

(4) 整个系统的受力分析。

当选整个系统为研究对象时, 可把由多个构件组成的整个系统“刚化”为一个刚体。该“刚体”除承受载荷 P 外, 在 B, C 两点还承受约束力 F_B, F_C 的作用, 因此, 整个系统的受力图如例题图 2-2(e) 所示。

讨论:

在分析整个系统的受力时, 铰链 A 处所受的力互为作用力与反作用力关系, 即 $F_{Ax} = -F'_{Ax}$, $F_{Ay} = -F'_{Ay}$; 绳子与梯子连接点 D 和 E 所受的力也分别互为作用力与反作用力关系, 即 $F_D = -F'_D$, $F_E = -F'_E$ 。这些力都对地作用在整个系统内, 称为内力 (internal force)。内力不影响整个系统的平衡, 故在受力图上不必画出, 只需画出系统以外的物体对系统的作用力, 称为外力 (external force)。应该指出, 内力与外力的区分不是绝对的。例如, 当把梯子的 AC 部分作为研究对象时, F'_{Ax} , F'_{Ay} 和 F'_E 均属于外力。但取整体为研究对象时, 这些力又成为内力。可见, 内力与外力的区分, 只有相对于某一确定的研究对象才有意义。

正确地画出物体的受力图, 是分析、解决力学问题的基础。总结以上例题, 画受力图时必须注意如下几点:

(1) 明确研究对象。首先确定整个系统由那些基本构件组成, 并明确它们之间的连接方式 (即约束形式)。根据求解需要, 可以取单个物体为研究对象, 也可以取由几个物体组成的系统为研究对象。不同研究对象的受力是不同的。

(2) 确定研究对象的受力数目。由于力是物体之间相互的机械作用, 因此, 对每一个力都应明确它是哪一个施力物体施加给研究对象的, 决不能凭空产生。同时, 也不可漏掉一个力。一般可先画已知的主动力, 再画约束力。凡是研究对象与外界接触的地方, 都一定存在约束力。

(3) 正确画出约束力。一个物体往往同时受到几个约束的作用, 这时应分别根据每个约束本身的特性来确定其约束力的作用线方位, 而不能凭主观臆测。大多数情况下, 约束力的实际指向事先是未知的, 可事先假定一个指向, 而实际指向由计算结果确定, 这将在后面的章节中学习。

(4) 当分析两个物体间的相互作用力时, 应遵循作用力与反作用力的关系。作用力的方向一经假定, 则反作用力的方向应与之相反。一般用 F' 表示 F 的反作用力。当画整个系统的受力图时, 只需画出全部外力, 不必画出内力。

(5) 巧妙地利用二力构件的受力特点, 可简化受力分析。

(6) 可以利用三力平衡汇交定理进一步分析受力, 并画出受力图。但在一般情况下, 为了计算方便, 并不这样做。如例题 2-1 中画出其图(d)所示的受力图即可。

例题 2-3

例题图 2-3(a)所示的是一个起重机支架, 已知支架重量 W 、重物重量 G 。不计摩擦。试画出重物、吊钩、滑车与支架及除立柱外物系整体的受力图。

解:

(1) 重物的受力分析。

重物上作用有重力 G 和吊钩沿绳索的拉力 F_{T1} , F_{T2} , 如例题图 2-3(b)所示。

(2) 吊钩的受力分析。

吊钩受绳索约束, 沿各绳有拉力 F'_{T1} , F'_{T2} , F_{T3} , 如例题图 2-3(c)所示。其中, 由于 F'_{T1} 和 F'_{T2} 是同一根绳子上的拉力, 若不计摩擦, 则大小相等。

(3) 滑车的受力分析。

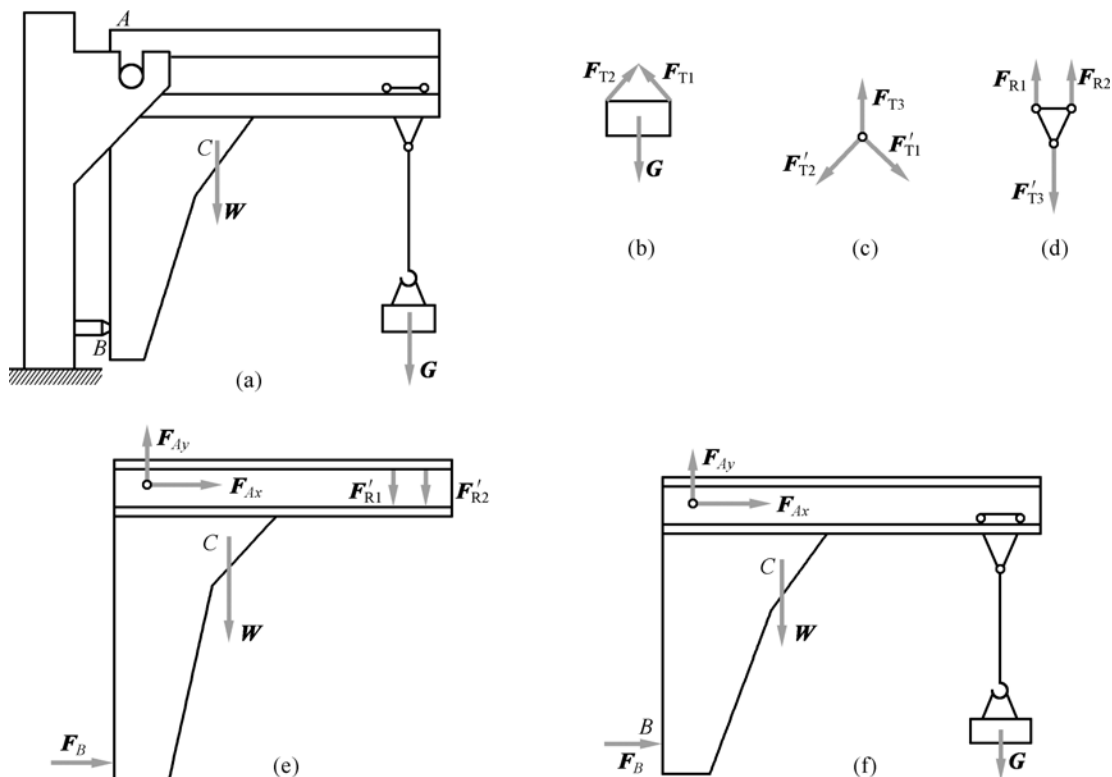
滑车上有钢梁对滑车滚轮垂直向上的约束力 F_{R1} , F_{R2} 及吊钩绳索的拉力 F'_{T3} , 如例题图 2-3(d)所示。

(4) 支架的受力分析。

支架点 A 为固定铰支约束, 约束力方向未知, 以两个相互垂直的分力 F_{Ax} 和 F_{Ay} 表示; 点 B 为光滑接触约束, 约束力 F_B 沿水平向右; 另外, 支架还受到滑车滚轮向下的压力 F'_{R1} 和 F'_{R2} , 以及支架自重 W 。最后的受力图如例题图 2-3(e) 所示。

(5) 整个物系的受力分析。

整个物系受到的作用力有 $G, W, F_B, F_{Ax}, F_{Ay}$, 其余均为内力, 不用画出, 结果如例题图 2-3(f) 所示。



例题图 2-3

例题 2-4

画出例题图 2-4(a) 中 AO 、 AB 和 CD 构件及整体的受力图。各杆重力均不计, 所有接触处均为光滑接触。

分析: (1) 确定整个系统中的基本构件: 杆 AO 、杆 CD 和杆 AB 。

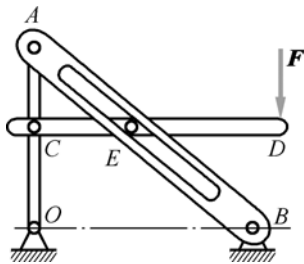
(2) 确定各基本构件的连接方式: A, C 为中间铰; E 为固定在杆 CD 上的销钉, 可在杆 AB 上的槽中滑动, 与槽之间属于光滑接触面约束; A, O 为固定铰。

(3) 确定是否有二力构件: 没有。

解:

(1) 整体的受力分析。

如例题图 2-4(b) 所示, D 处作用有主动力 F ; O, B 两处为固定铰链约束, 约束力为相互垂直的分力, 其余各处的约束力均为内力。



例题图 2-4(a)

(2) 杆 AO 的受力分析。

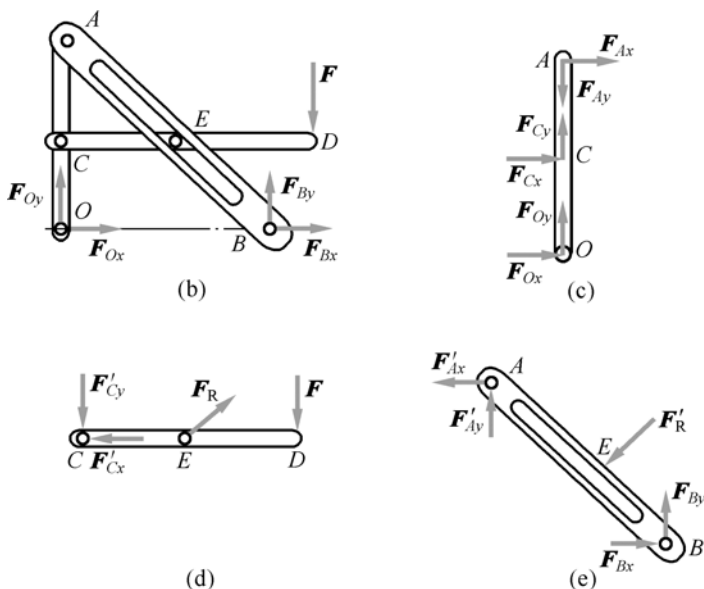
如例题图 2-4(c)所示, C, A 两处为中间活动铰链, 约束力方向未知, 可用两个垂直的分力表示。

(3) 杆 CD 的受力分析。

如例题图 2-4(d)所示, D 处作用有主动力 F ; C 处受力与 AO 在 C 处的受力互为作用力和反作用力; CD 上所带销钉 E 处受到杆 AB 中斜槽的光滑面约束力 F_R , 垂直于斜槽表面。

(4) 杆 AB 的受力分析。

如例题图 2-4(e)所示, 其中 A 处受力与 AO 在 A 处的受力互为作用力和反作用力; E 处受力与 CD 在 E 处的受力互为作用力和反作用力; B 处的约束力分解为两个分力。



例题图 2-4

例题 2-5

画出例题图 2-5(a)所示结构中各构件及整体的受力图。不计各构件重力, 所有约束处均为光滑约束。

分析: (1) 确定整个系统中的基本构件: 杆 CID 、杆 AIB 、杆 CB 、绳子、滑轮 D 和重物。

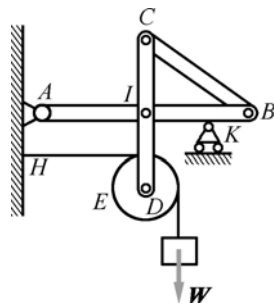
(2) 确定各基本构件的连接方式: C, B, I, D 为中间铰; A 为固定铰支座, K 为活动铰支座, 绳子为柔性约束。

(3) 确定是否有二力构件: CB 为二力杆。

解:

(1) 整体的受力分析。

如例题图 2-5(b)所示, A 处为固定铰链, 约束力方向未知, 以两个相互垂直的分力 F_{Ax} 和 F_{Ay} 表示; K 处为活动铰支座, 只有铅垂方向的约束力 F_K ; H 处为柔性约束, 约束力 F_T 为沿绳索的拉力。 D, C, I, B 处未解除约束, 约束力为内力, 不需要画出。



例题图 2-5(a)

(2) 杆 CB 的受力分析。

杆 CB 为二力杆, 受力 F'_{CB} 和 F'_{BC} 沿杆, 假设为拉力, 如例题图 2-5(c) 所示。

(3) 杆 CID 的受力分析。

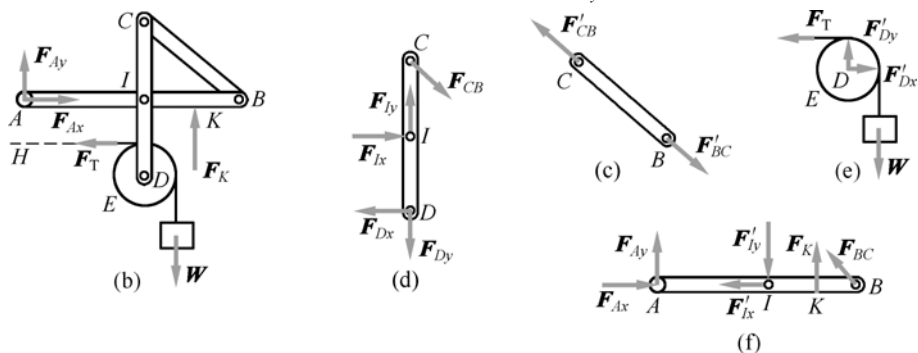
如例题图 2-5(d) 所示, C 处约束力 F_{CB} 的方向沿 CB , 与 F'_{CB} 互为作用力和反作用力; I 处为中间活动铰链, 约束力以两个垂直分力 F_{Ix} 和 F_{Iy} 表示; 同理, D 处中间铰链的约束力也可用两个垂直分力 F_{Dx} 和 F_{Dy} 表示。

(4) 杆 AIB 的受力分析。

如例题图 2-5(f) 所示, I 处的约束力 F'_{Ix} 和 F'_{Iy} 与杆 CD 上 I 处的约束力 F_{Ix} 和 F_{Iy} 互为作用力和反作用力; B 处的约束力 F_{CB} 与 F'_{CB} 互为作用力和反作用力。

(5) 轮 D 与重物组合系统的受力分析。

如例题图 2-5(e) 所示, D 处约束力 F_{Dx} , F_{Dy} 与 F'_{Dx} , F'_{Dy} 分别互为作用力和反作用力。



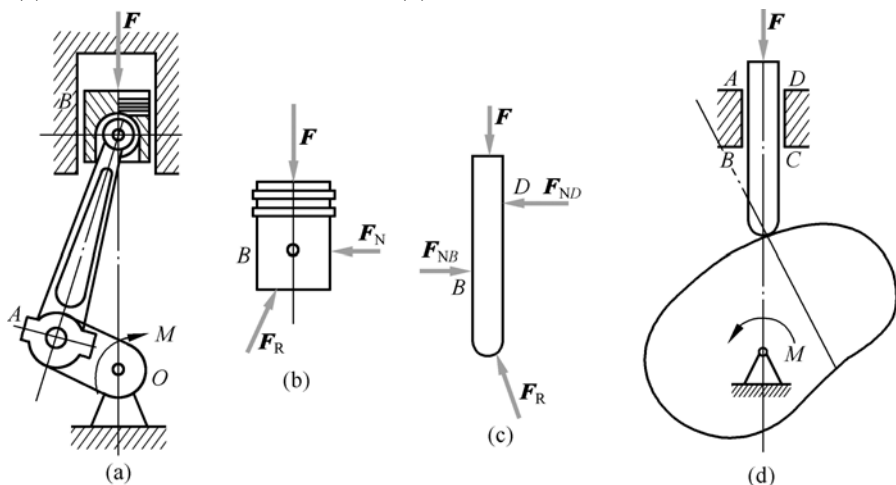
例题图 2-5

讨论:

例题 2-5 中的部分构件的受力满足三力平衡汇交定理, 因此, 可以进一步确定某些约束力的方向。请读者思考并画出相应的受力图。

例题 2-6

不计摩擦, 试分别画出例题图 2-6(b)、(c) 中滑块和推杆的受力图, 并进行比较。其中, 例题图 2-6(a) 为曲柄滑块机构, 例题图 2-6(d) 为凸轮机构。



例题图 2-6

解：

(1) 取例题图 2-6(a)中的滑块为研究对象。滑块受到的主动力为 F 。由于杆 AB 为二力构件，所以它对滑块 B 的约束力 F_R 沿 AB 。 F_R 与 F 的交点为点 B ，在滑块与滑道接触长度范围以内，其合力使滑块单面靠紧滑道，故滑块受到一个与约束面相垂直的约束 F_N ，与 F 和 F_R 三力汇交于点 B ，如例题图 2-6(b)所示。

(2) 取例题图 2-6(d)中的推杆为研究对象。推杆上的主动力 F 与凸轮对推杆的约束力 F_R （垂直于凸轮边缘）的交点在滑道之外，其合力使推杆倾斜而导致 B, D 两点接触，故有约束力 F_{NB} 和 F_{ND} 作用于推杆上，如例题图 2-6(c)所示。

由以上分析可知，滑块和推杆在滑道内受到的约束力不一样。滑块受到的所有力均汇交于一点，而推杆则不同。


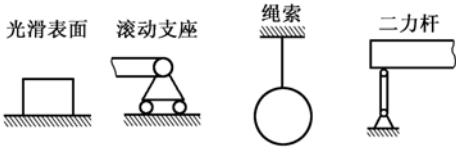

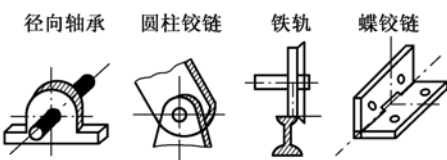
本章小结

1. 五个静力学公理和两个推论

- 公理 1：力的平行四边形法则
- 公理 2：二力平衡条件（只适用于刚体）
- 公理 3：加减平衡力系原理（只适用于刚体）
- 推论 1：力的可传性定理（只适用于刚体）
- 推论 2：三力平衡汇交定理
- 公理 4：作用与反作用定律
- 公理 5：刚化原理

2. 物体的约束和约束力——受力分析的关键

本章只讨论了部分没有约束力矩的约束形式，按约束力的特点分类总结于下表。

约束力未知量	约束类型
1 	光滑表面 滚动支座 绳索 二力杆 
2 	径向轴承 圆柱铰链 铁轨 螺铰链 

3. 受力分析——解决所有力学问题的基础

主要步骤和注意事项如下：

- (1) 确定组成结构的基本构件和构件之间的连接方式（约束形式）；

- (2) 明确研究对象，正确确定研究对象的受力（主动力和约束力）数目；
- (3) 根据约束性质正确画出约束力；
- (4) 当分析两个物体间的相互作用力时，应遵循作用与反作用力定律；
- (5) 明确结构中无二力构件，并利用其受力特点；
- (6) 只需画出外力，不画内力。

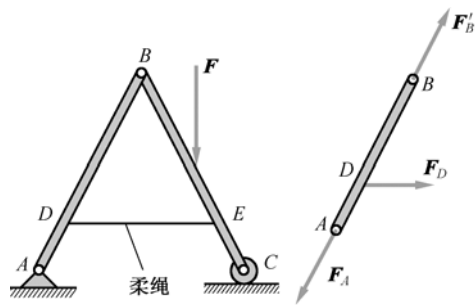
思考题

2-1 讨论在下述原理、法则、定理中，哪些仅适用于刚体，哪些可适用于变形体，为什么？

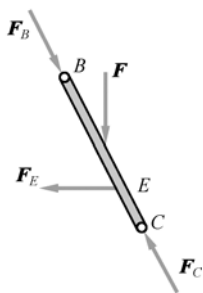
- (1) 二力平衡原理；
- (2) 力的平行四边形法则；
- (3) 加减平衡力系原理；
- (4) 力的可传性原理；
- (5) 作用与反作用定理。

2-2 试判断下述说法中，哪些是错误的，为什么？

- (1) 力有两种作用效果，即力可以使物体的运动状态发生变化，也可以使物体发生变形。
- (2) 在理论力学中只研究力的外效应。
- (3) 两端用光滑铰链连接的构件是二力构件；二力构件一定是直的。
- (4) 作用在一个刚体上的任意两个力成平衡的充分必要条件是：两个力的作用线相同，大小相等，方向相反。
- (5) 作用于刚体的力可沿其作用线移动而不改变其对刚体的运动效应。



思考题图 2-4

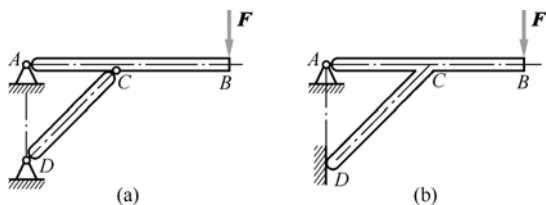


(6) 三力平衡定理指出：三力汇交于一点，则这三个力必然互相平衡。

(7) 平面汇交力系平衡时，力多边形各力应首尾相接，但在作图时力的顺序可以不同。

(8) 约束力的方向总是与约束所能阻止的被约束物体的运动方向一致。

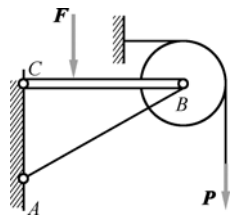
2-3 在思考题图2-3(a)和(b)所示的两种情形下，比较物体的受力情况有何不同。



思考题图 2-3

2-4 在思考题图 2-4 中，各物体的受力图是否正确？若有误，则应如何改正？

2-5 分析思考题图 2-5 所示的滑轮在包含销钉与不包含销钉时的受力图有何不同。

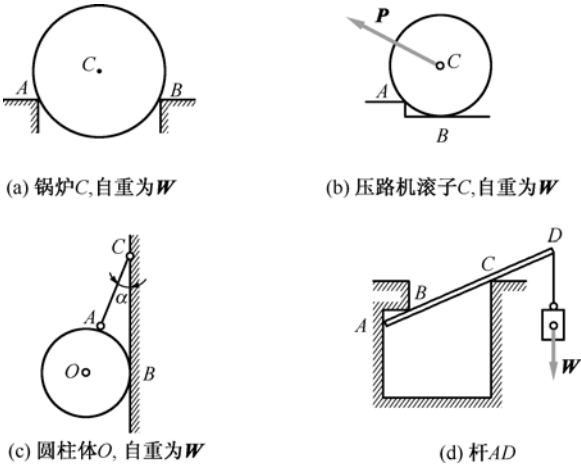


思考题图 2-5

习 题

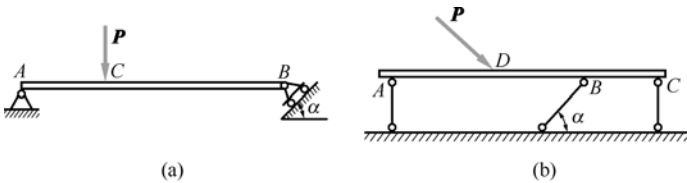
基本题

2-1 试分别作出习题图 2-1 所示各物体的受力图。假定所有接触面都是光滑的，除特别注明以外，物体的自重均略去不计。



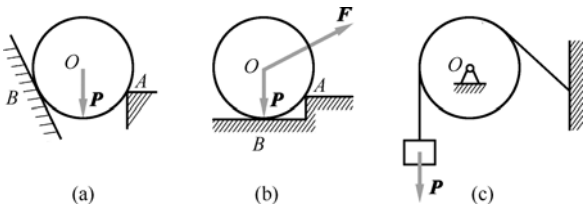
习题图 2-1

2-2 试画出如习题图 2-2 所示各梁的受力图。不计梁的自重。



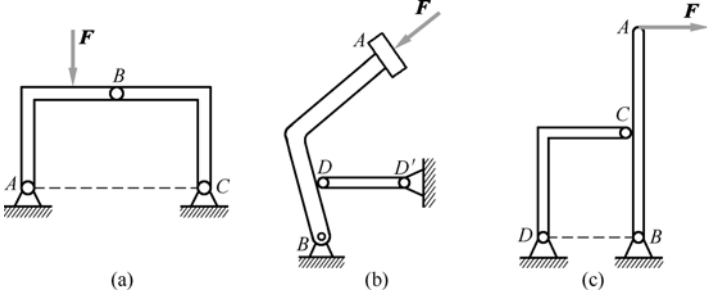
习题图 2-2

2-3 试画出如习题图 2-3 所示各结构中圆盘或圆柱的受力图，不计摩擦。



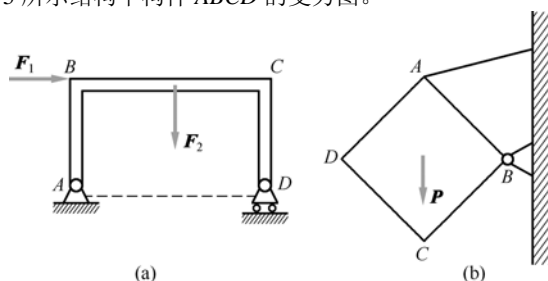
习题图 2-3

2-4 试画出如习题图 2-4 所示各结构中构件 AB 的受力图。



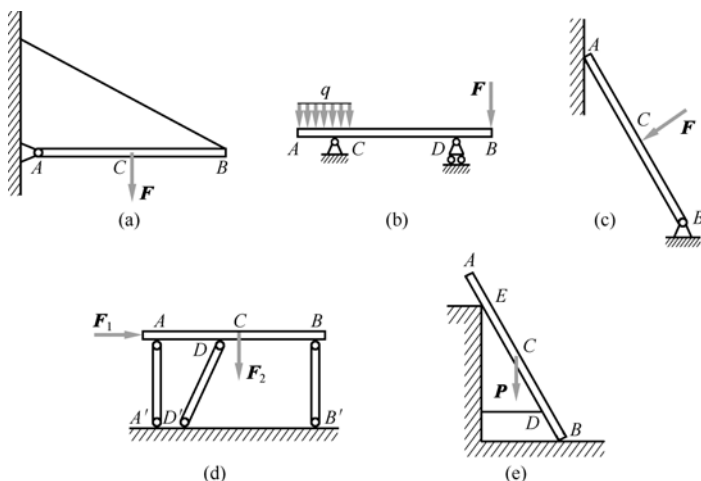
习题图 2-4

2-5 试画出如习题图 2-5 所示结构中构件 $ABCD$ 的受力图。



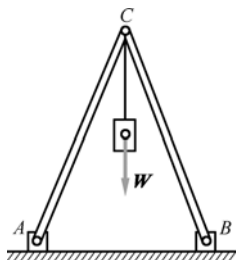
习题图 2-5

2-6 试画出如习题图 2-6 所示各结构中杆 AB 的受力图。



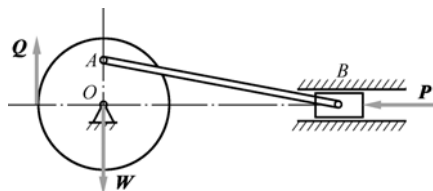
习题图 2-6

2-7 如习题图 2-7 所示，吊架 ABC 由两根杆子用铰链 C 连接而成。在销钉 C 上挂有重 W 的物体。在不计杆重和计杆重两种情况下，试分别作出杆 AC 、杆 BC 和销钉 C 的受力图。



习题图 2-7

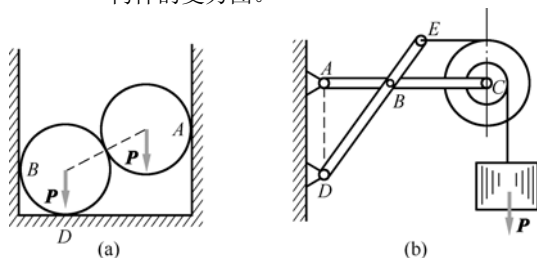
2-8 如习题图 2-8 所示，机构中连杆 AB 的两端分别用铰链与圆盘和滑块连接，各接触面都是光滑的。试分别作出连杆 AB 、圆盘 O 和滑块 B 的受力图。圆盘重 W ，连杆和滑块的自重不计。



习题图 2-8

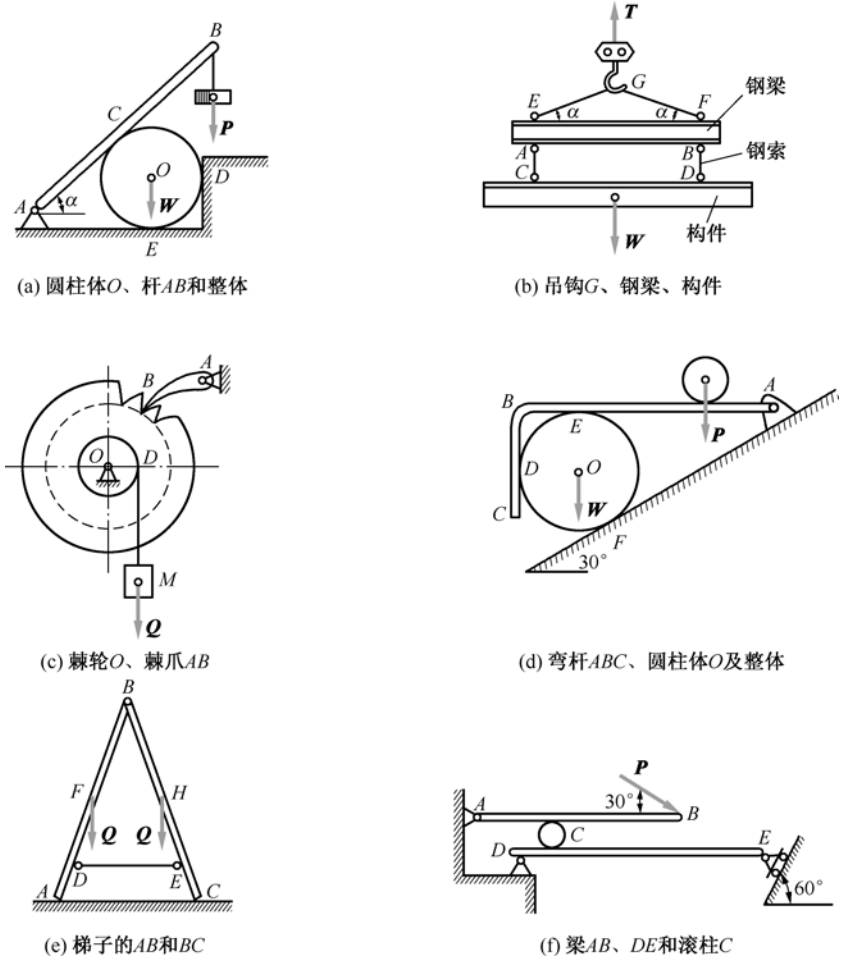
提高题

2-9 试画出习题图 2-9 所示刚体系的整体和各构件的受力图。



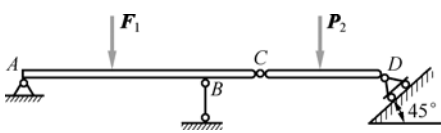
习题图 2-9

2-10 画出习题图 2-10 所示物体系中指定物体的受力图。假定所有接触面都是光滑的，图中没有标示重力的物体都不考虑其重量。



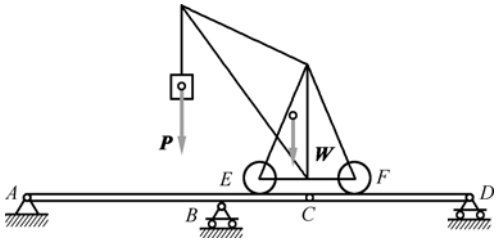
习题图 2-10

2-11 习题图 2-11 所示的多跨梁用铰链 C 连接，试分别作出梁 AC、梁 CD 和整体的受力图。



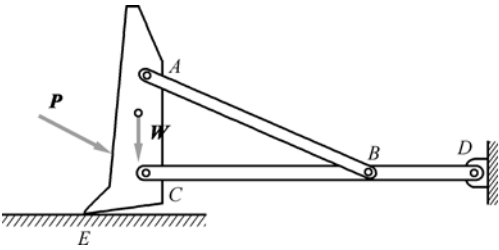
习题图 2-11

2-12 如习题图 2-12 所示，一个重为 W 的起重机停放在多跨梁上，起吊物体重 P 。试分别画出起重机、梁 AC 和梁 CD 的受力图。设各接触面都是光滑的，不计各梁的自重。



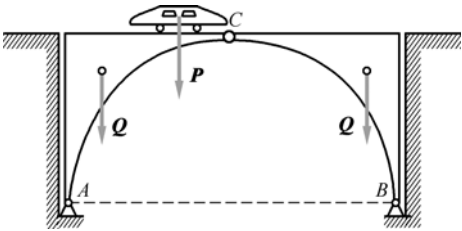
习题图 2-12

2-13 推土机刀架如习题图 2-13 所示，A、B、C 均为铰链。假设地面是光滑的，铲刀重 W ，所受土壤阻力为 P ，不计各杆的自重。试分别作出杆 AB、杆 CD 和铲刀的受力图。



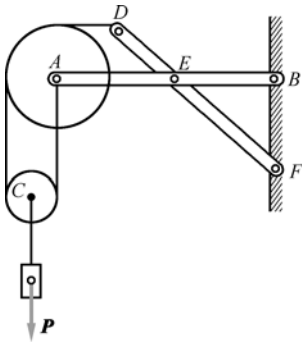
习题图 2-13

2-14 三铰拱桥如习题图 2-14 所示，左、右半拱的自重均为 Q ，汽车重为 P 。试分别画出左半拱（包括汽车）、右半拱和整体的受力图。



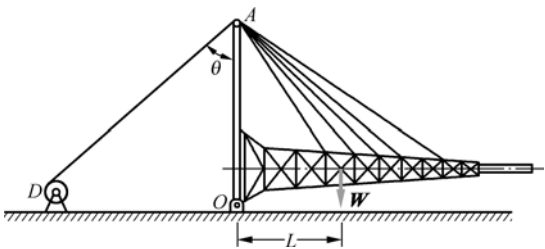
习题图 2-14

2-15 如习题图 2-15 所示的构架， A, E, B, F 均为铰链，不计各杆和滑轮的自重。画出滑轮 A 、滑轮 C 、杆 AB 和杆 DF 的受力图。



习题图 2-15

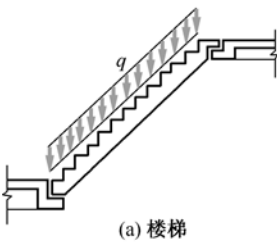
2-16 画出如习题图 2-16 所示电视塔（包括人字架 OA ）的受力图。电视塔正在起扳中，塔身连同入字架 OA 重 W ， O 为铰链， AD 为拉索。



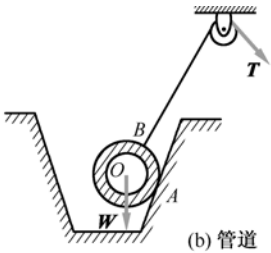
习题图 2-16

研究性题

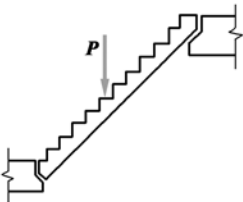
2-17 画出习题图 2-17 所示各结构的受力图，不计摩擦。



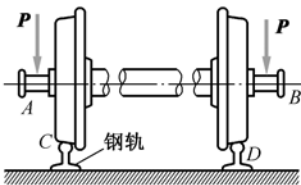
(a) 楼梯



(b) 管道



(c) 楼梯



(d) 列车轮对

习题图 2-17

在静力学中，为了便于研究问题，通常按力系中各力作用线的空间分布情况，分为平面力系和空间力系两大类。各力的作用线均在同一平面上的力系称为平面力系；作用线不全在同一平面上的力系称为空间力系。本节将介绍两种最简单的平面力系——平面汇交力系和平面力偶系的合成与平衡分析。

3.1 平面汇交力系

在平面力系中，若各力的作用线及其延长线汇交于一点，则称该平面力系为平面汇交力系(planar concurrent forces)。例如，用力 F 拉动碾子压平路面，当受到石块的阻碍而停止前进时，碾子受到拉力 F 、重力 P 、地面约束力 N_B 以及石块的约束力 N_A 的作用，以上各力的作用线都处在铅垂平面内且汇交于碾子中心点 C ，由 F, P 和 N_B 组成的力系就是平面汇交力系，如图3-1所示。

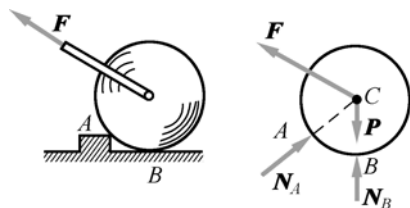


图3-1 平面汇交力系

3.1.1 平面汇交力系合成与平衡分析的几何法

平面汇交力系合成的几何法——力多边形法则

对于平面汇交力系，可以按两个共点力的合成方法，逐次使用力三角形法则得到其合力。如图3-2(a)所示，设物体上作用有汇交于点 A 的平面汇交力系： F_1, F_2, F_3, F_4 ，现考察其合力结果。按照力三角形法则，先求 F_1 与 F_2 的合力 F_{R1} ，再求 F_{R1} 与 F_3 的合力 F_{R2} ，最后求出 F_{R2} 与 F_4 的合力 F_R 。 F_R 就是这个汇交力系的合力，如图3-2(b)所示。实际作图时， F_{R1}, F_{R2} 可不必画出，只需按一定的比例将力系中各力矢首尾相接组成一条折线，然后，用带箭头的直线段从第一个力的起点连接到最后一个力的终点，就得到合力 F_R ，如图3-2(c)所示。这样得到的多边形 $ABCDE$ 称为力多边形(force polygon)，而合力矢是力多边形的封闭边。这种求合力的几何作图方法叫力多边形法则，也称为几何法。其表达式为

$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

显然,无论有多少个力组成汇交力系,都可以用这种方法进行合成。即平面汇交力系合成的结果是一个合力,等于原力系中所有各力的矢量和,可表示为

$$\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F}_i \quad (3-1)$$

其作用线通过力系的汇交点。

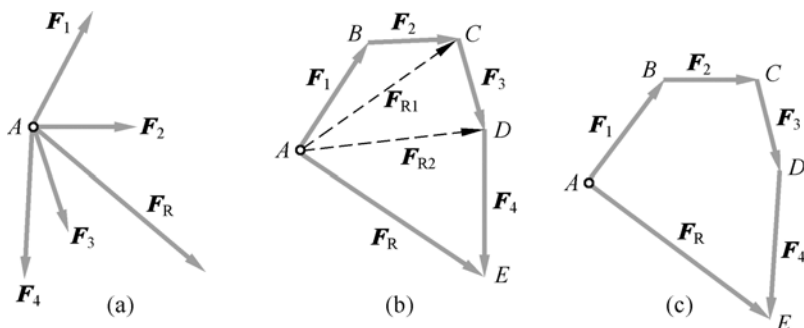


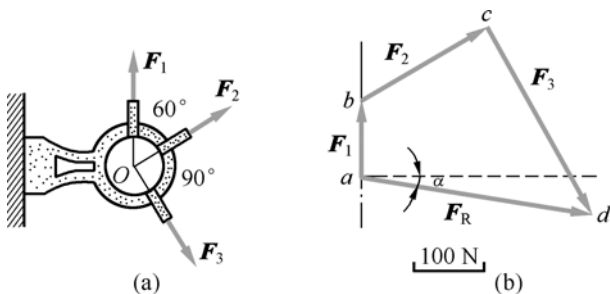
图 3-2 求合力的力多边形法

需要指出的是,在作力多边形时,若按不同的顺序画各个分力,得到的力多边形也不同,但力多边形的封闭边不变,即最终合力的大小和方向不变。也就是说,力多边形的合成结果中与各力的顺序无关,尽管其形状可能不同。

作为平面汇交力系的一个特殊情况,若力系所有力的作用线在同一条直线上,则称为共线力系(collinear forces)。此时的力多边形也在该直线上。如果沿直线定义正负方向,则力系的合力可用一个代数量(标量)表示,其值等于各分力的代数和。

例题 3-1

如例题图 3-1(a)所示,一个固定环受到三根绳的拉力,分别为 $F_1 = 100 \text{ N}$ 、 $F_2 = 280 \text{ N}$ 、 $F_3 = 350 \text{ N}$ 。试用几何法求这三个力的合力。



例题图 3-1

解:

拉力 F_1, F_2, F_3 的作用线相交于环的中心 O , 组成一个平面汇交力系。选单位长度代表 100 N , 作矢量 $\overline{ab} = F_1$ 、 $\overline{bc} = F_2$ 、 $\overline{cd} = F_3$, 连接 F_1 的起点 a 和 F_3 的终点 d , 矢量 \overline{ad} 即代表合力 F_R 的大小和方向, 如例题图 3-1(b)所示。用比例尺量得 $F_R = 422 \text{ N}$, 用量角器量得合力与水平方向的夹角 $\alpha = 9^\circ$ 。合力的作用线通过力系的汇交点。

平面汇交力系平衡的几何条件

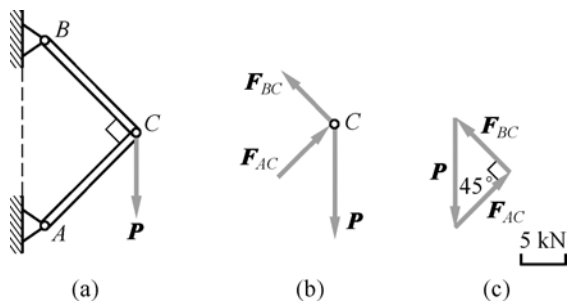
平面汇交力系平衡的充分必要条件是合力等于零，即

$$\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F}_i = 0 \quad (3-2)$$

若用上述几何法求力系的合力，则合力为零意味着力多边形自行封闭。所以，平面汇交力系平衡的充分且必要的几何条件是：力系的力多边形自行封闭。

例题 3-2

在例题图 3-2(a)所示的结构中，杆 AC 与杆 BC 相互垂直， $BC = AC$ ， $P = 10 \text{ kN}$ 。试求杆 AC 与杆 BC 所受的力。



例题图 3-2

解：

选铰 C 为研究对象，画受力图，如例题图 3-2(b)所示。其中，因为杆 AC 和杆 BC 是二力杆，所以它们对铰 C 的约束力 \mathbf{F}_{AC} 、 \mathbf{F}_{BC} 的作用线分别沿杆 AC 和杆 BC ，并与外力 \mathbf{P} 构成一个平面汇交力系。作力三角形，如例题图 3-2(c)所示，根据平衡的几何条件，力三角形应封闭，于是由几何关系得

$$F_{AC} = F_{BC} = P \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ kN}$$

根据作用力和反作用力的关系，杆 AC 和杆 BC 的受力等于 $5\sqrt{2} \text{ kN}$ 。

通过以上例题，可总结利用几何法进行合成和平衡分析的解题步骤如下：

- (1) 选取研究对象；
- (2) 画受力图；
- (3) 选择适当的比例尺作力多边形（合成）或作封闭的力多边形（平衡），注意作图时从已知力开始；
- (4) 利用几何关系计算未知量。

显然，几何法解题存在许多不足，如作图精度要求高，不容易达到，因而误差较大；而且不易表达各个量之间的函数关系。下面将要介绍的解析法可以克服这些缺点。

3.1.2 平面汇交力系合成与平衡分析的解析法

平面汇交力系合成的几何法虽具有直观、简捷、计算量小的优点，但是难以达到较高的精确度，所以在定量计算中经常应用如下的解析法。

平面汇交力系合成的解析法——合力投影定理

如图 3-3 所示, 设由 n 个力组成的平面汇交力系: F_1, F_2, \dots, F_n 。建立直角坐标系 Oxy 和相应的单位基矢量 (i, j) 。根据 1.2 节中关于力的解析表示, 可将各分力 F_i 写成投影形式: $F_i = F_{xi}i + F_{yi}j$, 则合力

$$F_R = \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n (F_{xi}i + F_{yi}j) = \left(\sum_{i=1}^n F_{xi} \right) i + \left(\sum_{i=1}^n F_{yi} \right) j$$

同样, 将合力写成投影形式: $F_R = F_{Rx}i + F_{Ry}j$, 则有

$$F_{Rx} = \sum F_{xi}, \quad F_{Ry} = \sum F_{yi} \quad (3-3)$$

式(3-3)表明, 合力在任一轴上的投影, 等于各分力在同一轴上投影的代数和, 称之为合力投影定理。实际上, 任意矢量都具有类似性质。

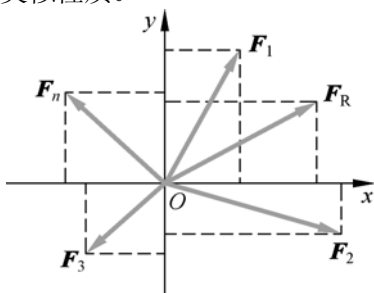


图 3-3 合力投影定理

由式(3-3)可求得合力的大小为

$$F_R = \sqrt{(F_{Rx})^2 + (F_{Ry})^2} = \sqrt{\left(\sum F_{xi} \right)^2 + \left(\sum F_{yi} \right)^2} \quad (3-4)$$

合力的方向由如下方向余弦

$$\cos(F_R, i) = \frac{F_{Rx}}{F_R} = \frac{\sum F_{xi}}{F_R}, \quad \cos(F_R, j) = \frac{F_{Ry}}{F_R} = \frac{\sum F_{yi}}{F_R} \quad (3-5)$$

并结合 F_{Rx}, F_{Ry} 的符号来确定; 合力的作用点为该力系的汇交点。

注意, 上述各公式只对直角坐标系成立。应用式(3-3)~式(3-5)计算合力大小和方向的方法称为解析法。

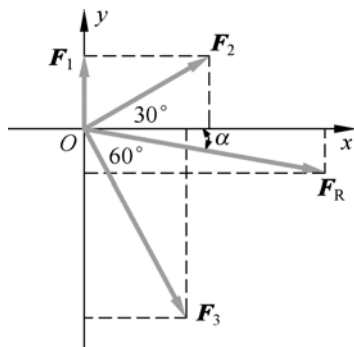
例题 3-3

试用解析法求解例题 3-1。

解:

(1) 建立直角坐标系 xOy , 如例题图 3-3 所示。计算合力 F_R 在 x, y 轴上的投影

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= \sum F_{xi} = F_2 \cos 30^\circ + F_3 \cos 60^\circ \\ &= 280 \times 0.866 + 350 \times 0.5 = 417.48 \text{ N} \\ F_{Ry} &= \sum F_{yi} = F_1 + F_2 \sin 30^\circ - F_3 \sin 60^\circ \\ &= 100 + 280 \times 0.5 - 350 \times 0.866 = -63.10 \text{ N} \end{aligned}$$



例题图 3-3

(2) 求合力的大小

$$F_R = \sqrt{(F_{Rx})^2 + (F_{Ry})^2} = \sqrt{417.48^2 + 63.10^2} = 422.22 \text{ N}$$

(3) 求合力的方向

$$\cos(\mathbf{F}_R, \mathbf{i}) = \frac{F_{Rx}}{F_R} = \frac{417.48}{422.22} = 0.989, \quad \alpha = 8.5^\circ$$

故合力 \mathbf{F}_R 指向右下方，作用线通过力系的汇交点 O 。

以上分析表明，解析法精度高，误差小，且容易得到各个量之间的函数关系。

平面汇交力系的平衡方程

平面汇交力系平衡的充分必要条件是该力系的合力 $\mathbf{F}_R = 0$ ，于是由式(3-3)或式(3-4)得

$$F_{Rx} = \sum F_{xi} = 0, \quad F_{Ry} = \sum F_{yi} = 0 \quad (3-6)$$

称为平面汇交力系的平衡方程。

例题 3-4

试利用解析法求解例题 3-2。

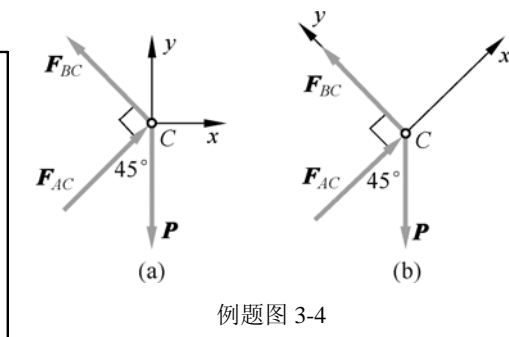
解：

选铰 C 为研究对象，画受力图并建立直角坐标系，如例题图 3-4(a)所示。列平衡方程，得

$$\begin{aligned} \sum F_{xi} = 0 & \quad F_{AC} \cdot \cos 45^\circ - F_{BC} \cdot \cos 45^\circ = 0 \\ \sum F_{yi} = 0 & \quad -P + F_{AC} \cdot \sin 45^\circ + F_{BC} \cdot \sin 45^\circ = 0 \end{aligned}$$

联立求解上述方程组，得

$$F_{AC} = F_{BC} = \frac{P}{2\sin 45^\circ} = 5\sqrt{2} \text{ kN}$$



例题图 3-4

讨论：

坐标系的选取可以是任意的。如果选取例题图 3-4(b)所示的坐标系，使坐标轴与其中一个力垂直或平行（该例中 x, y 轴分别与 F_{AC}, F_{BC} 平行），则得平衡方程为

$$\begin{aligned} \sum F_{xi} = 0 & \quad F_{AC} - P \cdot \cos 45^\circ = 0 \\ \sum F_{yi} = 0 & \quad F_{BC} - P \cdot \sin 45^\circ = 0 \end{aligned}$$

无须求解联立方程，即可直接由上述方程得到 F_{AC} 和 F_{BC} 。可见，选取适当的坐标系可以简化计算过程。

通过以上例题，可以总结出如下汇交力系平衡分析的技巧。

(1) 一般地，对于受多个力作用的物体，用解析法求解简便。只有当物体仅受三个力作用，且方向特殊时，用几何法（解力三角形）才比较简便。

- (2) 对力的实际指向事先无法判定时, 宜选用解析法。
- (3) 解析法解题时, 力的指向可以任意假设。如果解出的值为正, 则力的实际指向与假设相同; 否则, 则与假设相反。对于二力构件, 一般可先设为拉力, 如果结果为负, 说明构件受压。
- (4) 投影轴通常选择与某个未知力垂直, 最好使每个方程中只有一个未知数, 以避免求解方程组。

3.2 平面力对点的矩

平面力对点的矩——力矩

力对刚体的作用效应是使刚体的运动状态发生改变(包括移动与转动), 其中力对刚体的移动效应可用力矢来度量; 而力对刚体绕一固定点的转动效应可用力对该点的矩[简称力矩(moment)]来度量, 即力矩是度量力对刚体转动效应的物理量。

如图 3-4 所示, 平面上作用一个力 F , 在同一平面内有一点 O [称为矩心(center of moment)], 设点 O 到力的作用线的垂直距离为 h [称为力臂(moment arm)], 则平面力 F 对点 O 的矩定义如下:

力对点的矩是一个代数量(标量), 其绝对值等于力的大小与力臂的乘积, 其正负规定为: 力使物体绕矩心逆时针转动时为正, 反之为负。

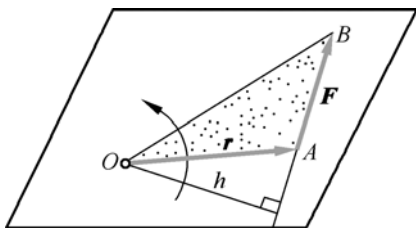


图 3-4 平面力对点的矩

平面力 F 对于点 O 的矩以记号 $M_O(F)$ 表示, 力矩计算公式为

$$M_O(F) = \pm Fh \quad (3-7)$$

由图 3-4 容易看出, 力 F 对点 O 的矩其大小也可用三角形 OAB 面积的两倍来表示, 即

$$M_O(F) = \pm 2S_{\triangle OAB}$$

显然, 当力的作用线通过矩心时, 力臂等于零, 所以它对矩心的力矩等于零。力矩的单位常用 $\text{N}\cdot\text{m}$ 或 $\text{kN}\cdot\text{m}$ 来表示。

合力矩定理

对平面汇交力系有如下合力矩定理: 平面汇交力系的合力对作用平面内任一点的矩等于各分力对该点的矩的代数和。

合力矩定理也可以这样理解: 按力系等效的概念, 一个力系的合力与这个力系等效, 所以, 这个力系对物体的转动效应与其合力对该物体的转动效应相同。合力矩定理也适用于任何存在合力的力系。

当求力臂的几何关系比较复杂时, 合力矩定理可以用来简化力矩的计算。

例题 3-5

如例题图 3-5 所示, $AB = x$, $OA = y$, F 与水平方向的夹角为 α 。求 F 对点 O 的矩。

解:

(1) 建立坐标系 Oxy , 则力 F 的作用点为 $B(x, y)$ 。将力 F 分解为水平分量 $F_x = F \cos \alpha$ 和垂直分量 $F_y = F \sin \alpha$ 。

(2) 水平分量 $F \cos \alpha$ 对点 O 的矩: 转向为逆时针, 大小为 $yF \cos \alpha$ 。

垂直分量 $F \sin \alpha$ 对点 O 的矩: 转向为顺时针, 大小为 $xF \sin \alpha$ 。

(3) 由合力矩定理, F 对点 O 的矩为

$$M_O(F) = M_O(F_x) + M_O(F_y) = xF \sin \alpha - yF \cos \alpha = xF_y - yF_x \quad (3-8)$$

讨论:

式(3-8)即为平面力矩的解析表达式, F_x, F_y 为力 F 在 x, y 轴的投影 (注意正负号)。

由多个力组成的平面汇交力系的合力 F_R 对坐标原点的矩可以解析表示为

$$M_O(F_R) = \sum (x_i F_{yi} - y_i F_{xi}) \quad (3-9)$$

式中, (x_i, y_i) 为第 i 个分力作用点的坐标, F_{xi}, F_{yi} 为第 i 个分力在 x, y 轴的投影。

3.3 平面力偶系

力偶与力偶矩

汽车司机用双手转动驾驶盘 (如图 3-5(a) 所示), 电动机的定子磁场对转子作用电磁力使之旋转 (如图 3-5(b) 所示), 钳工用丝锥攻螺纹等。在驾驶盘、电动机转子、丝锥等物体上, 都作用了成对的等值、反向不共线的平行力。它们的矢量和显然等于零, 但是由于不共线, 所以不能相互平衡, 而是改变物体的转动。这种由两个大小相等、方向相反且不共线的平行力组成的力系, 称为力偶 (couple), 记为 (F, F') 。两力之间的垂直距离 d 称为力偶臂 (arm of couple), 两力作用线所在的平面称为力偶的作用面 (active plane of couple), 如图 3-6 所示。

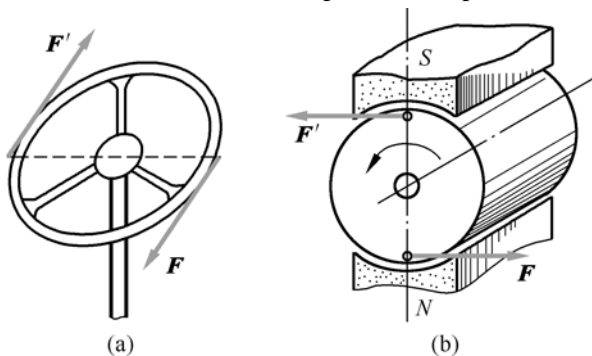
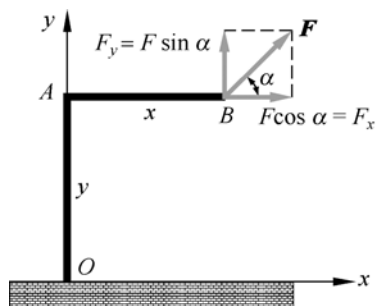


图 3-5 力偶实例



例题图 3-5

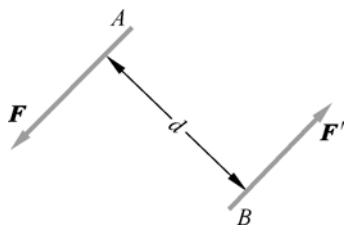


图 3-6 力偶

力偶不能合成为一个力，或用一个力来等效，所以力偶也不能用一个力来平衡。因此，力和力偶是力学中的两个基本要素。

力偶是由两个力组成的特殊力系，它的作用只改变物体的转动状态。因此，力偶对物体的转动效应，可用力偶矩（moment of couple）来度量，即用力偶的两个力对其作用面内某点的矩的代数和来度量。

设有力偶 (F, F') ，其力偶臂为 d ，如图 3-7 所示，则力偶对任一点 O 的矩为

$$M_o(F, F') = M_o(F) + M_o(F') = F \cdot aO - F \cdot bO = F(aO - bO) = Fd$$

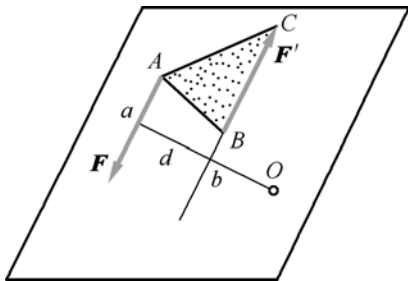


图 3-7 力偶矩的计算

由于矩心 O 是任意选取的，所以力偶的作用效应决定于力的大小和力偶臂的长短，即等于力与力偶臂的乘积，与矩心的位置无关，记为 $M(F, F')$ ，简记为 M 。

另外，力偶在平面内的转向不同，其作用效应也不相同。因此，平面力偶对物体的作用效应由以下两个因素决定：

- (1) 力偶矩的大小；
- (2) 力偶在作用平面内的转向。

可见，平面力偶的要素有：力偶的大小和转向。因此，力偶矩可用一个代数量表示

$$M = \pm Fd \quad (3-10)$$

式中，正负号表示力偶的转向。一般规定逆时针转向为正，反之为负。力偶矩的单位与力矩相同，也是 $\text{N} \cdot \text{m}$ 。

同平面内力偶的等效定理

两个不同的力偶对物体具有相同的转动效果，则称它们等效。关于平面力偶，成立如下等效定理：在同一平面内的两个力偶，如果力偶矩相等，则两个力偶彼此等效。

由上述同一平面内力偶的等效定理可得如下推论：

(1) 任一力偶可以在它的作用面内任意移动和转动，而不改变它对刚体的作用效果，因此力偶对刚体的作用与力偶在其作用面内的位置无关；

(2) 只要保持力偶矩的大小和力偶的转向不变,可以同时改变力偶中力的大小和力偶臂的长短,而不改变力偶对刚体的作用效果。

由此可见,力偶中的力和力偶臂都不能单独作为衡量力偶作用效果的特征量,只有力偶矩才是表征力偶作用效果的唯一特征量。今后常用图 3-8 所示的符号表示力偶。

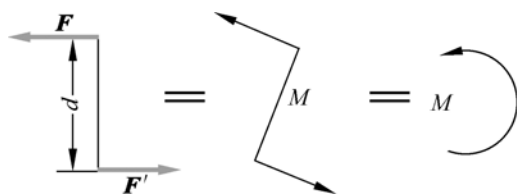


图 3-8 力偶的表示符号

平面力偶系的合成

设在同一平面内有两个力偶 (F_1, F'_1) 和 (F_2, F'_2) , 它们的力偶臂分别为 d_1 和 d_2 , 力偶矩分别为 M_1 和 M_2 , 如图 3-9(a)所示。现考查它们的合成结果。

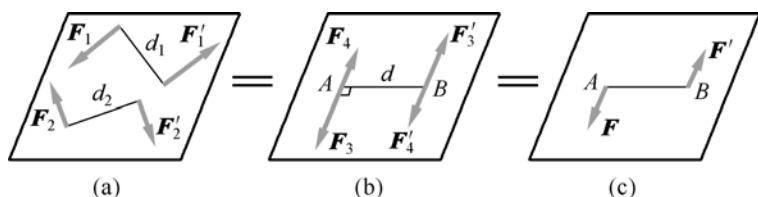


图 3-9 平面力偶系的合成

为此,在保持力偶矩不变的情况下,同时改变这两个力偶的力的大小和力偶臂的长短,使它们具有相同的力偶臂 d ,并将它们在平面内移动和转动,使力的作用线重合,如图 3-9(b)所示。于是,得到与原力偶等效的两个新力偶 (F_3, F'_3) 和 (F_4, F'_4) , 其中 F_3 和 F_4 的大小为

$$F_3 = \frac{M_1}{d}, \quad F_4 = \frac{M_2}{d}$$

分别将作用在点 A 和点 B 的力合成(不失一般性设 $F_3 > F_4$), 得

$$F = F_3 - F_4, \quad F' = F'_3 - F'_4$$

由于 F 与 F' 是相等的,所以构成了与原力偶系等效的合力偶 (F, F') , 如图 3-9(c)所示,以 M 表示合力偶的矩,得

$$M = F \cdot d = (F_3 - F_4)d = F_3d - F_4d = M_1 - M_2$$

对于由两个以上的力偶组成的力偶系,可以按照上述方法合成为一个合力偶,合力偶矩等于各个力偶矩的代数和,即

$$M = \sum M_i \quad (3-11)$$

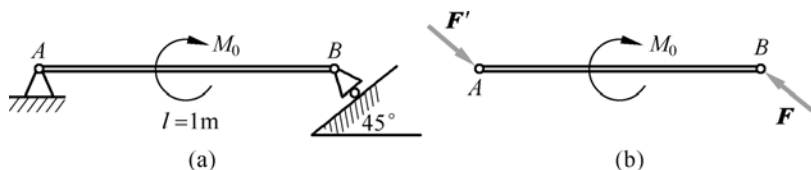
平面力偶系的平衡条件

由力偶系合成的结果可知,当力偶系平衡时,其合力偶的矩应等于零。因此,平面力偶系平衡的充分必要条件为:所有各力偶矩的代数和等于零,即

$$\sum M_i = 0 \quad (3-12)$$

例题 3-6

如例题图 3-6(a)所示的梁 AB ，长 $l = 1 \text{ m}$ ； A 端为固定铰支座约束； B 为活动铰支座，置于 45° 的斜面上，梁上作用一力偶 $M_0 = 10 \text{ N}\cdot\text{m}$ 。试求 A, B 两端的约束力。



例题图 3-6

解：

选取梁为研究对象。由于除了 A, B 两端的约束力以外，梁只受到力偶 M_0 的作用，所以 A, B 两端的约束力应组成一力偶，与 M_0 平衡；而 B 端活动铰支座的约束力 F 垂直于斜面，所以 A 端固定铰支座的约束力也沿该方向，但指向相反。于是，梁的受力如例题图 3-5(b)所示。由力偶系的平衡条件，得

$$\sum M = 0, \quad M_0 - Fl \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

解得

$$F = \frac{\sqrt{2}M_0}{l} = 10\sqrt{2} \text{ N}$$

本章小结

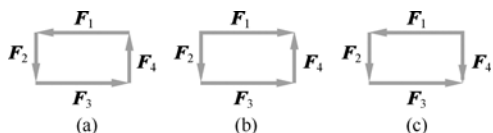
1. 平面简单力系：平面汇交力系、平面力偶系。
2. 平面汇交力系的合成——合力。
 - (1) 几何法 力多边形（力三角形）： $F_R = \sum F_i$ 。
 - (2) 解析法 合力投影定理： $F_{Rx} = \sum F_{xi}$ ， $F_{Ry} = \sum F_{yi}$ 。
3. 平面汇交力系的平衡条件：
 - (1) 几何条件 力多边形自行封闭： $F_R = \sum F_i = 0$ ；
 - (2) 解析条件 $F_{Rx} = \sum F_{xi} = 0$ ， $F_{Ry} = \sum F_{yi} = 0$ 。
4. 平面力对点的矩：力矩，合力矩定理。
5. 力偶的概念，力偶矩的计算。
6. 平面力偶系的合成——合力偶： $M = \sum M_i$ 。
7. 平面力偶系的平衡： $M = \sum M_i = 0$ 。

思 考 题

3-1 试判断下述说法是否正确，错误的请指出原因。

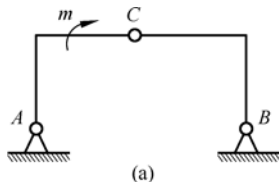
- (1) 因为构成力偶的两个力满足 $\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$ ，所以力偶的合力等于零。
- (2) 力偶对其作用面内任意一点的矩都等于力偶矩。
- (3) 平面汇交力系平衡时，力多边形各力应首尾相接，但在作图时力的顺序可以不同。
- (4) 同一个平面内的两个力偶，只要它们的力偶矩相等，这两个力偶就一定等效。
- (5) 平面汇交力系中所有的力沿两个不相垂直的轴的投影之和等于零，则该力系平衡。
- (6) 若两个力在某一轴上的投影相等，则这两个力大小一定相等。
- (7) 力在某投影轴方向上的分力总与该力在该轴上的投影大小相同。

3-2 作用于刚体上的四个力如思考题图 3-2 所示，请说明这四个力的关系，并用矢量表示。

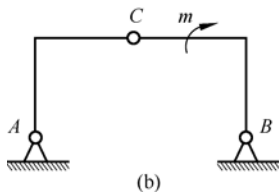


思考题图 3-2

3-3 将思考题图 3-3(a)所示的力偶 m 移至思考题图 3-3(b)所示的位置，试讨论 A, B, C 处的约束力如何变化。



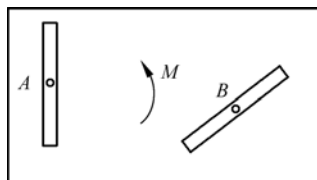
(a)



(b)

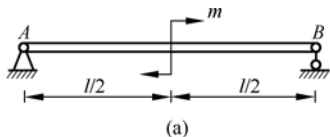
思考题图 3-3

3-4 思考题图 3-4 所示的是矩形平板带有两个不平行的槽，板上作用一个矩为 M 的力偶，在槽内插入两个固定于地面的销钉，若不计摩擦，板是否能保持平衡？

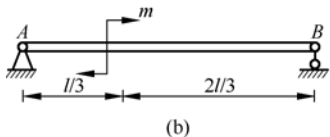


思考题图 3-4

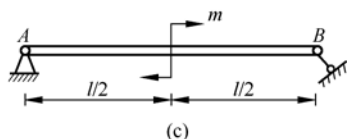
3-5 简支梁 AB 所受载荷分别如思考题图 3-5(a)、(b)和(c)所示，分别用 F_{N1}, F_{N2}, F_{N3} 表示三种情况下支座 B 的约束力，试讨论它们之间的关系。



(a)



(b)



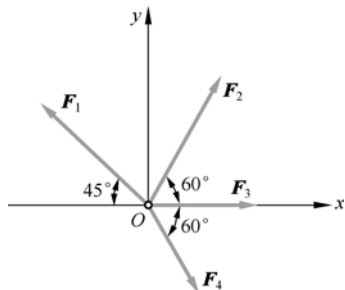
(c)

思考题图 3-5

习 题

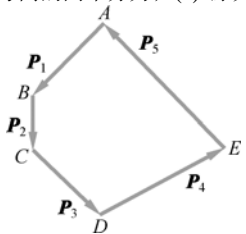
基本题

- 3-1 如习题图 3-1 所示, 已知 $F_1 = 150 \text{ N}$, $F_2 = 200 \text{ N}$, $F_3 = 250 \text{ N}$ 及 $F_4 = 100 \text{ N}$ 。试用图解法求该力系的合力。



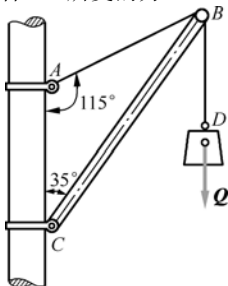
习题图 3-1

- 3-2 根据一个平面共点力系绘制的力多边形如习题图 3-2 所示。(1) 求 P_1 和 P_2 的合力; (2) 求 P_1 和 P_5 的合力; (3) P_1, P_2 和 P_3 的合力是否等于 P_4 和 P_5 的合力? (4) 求 P_1 沿 AE 和 BE 方向的分力; (5) 求 P_1, P_2 和 P_3 的合力沿 AE 和 DE 方向的两个分力; (6) 原力系是否平衡?



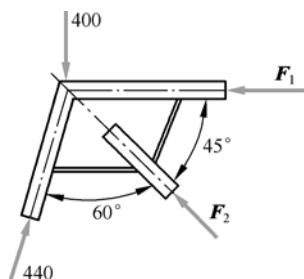
习题图 3-2

- 3-3 习题图 3-3 所示的是简易起重机, 由杆 BC 和钢索 AB 构成。把杆的一端用铰链固定在柱上点 C , 另一端用绳 BD 悬挂重物 $Q = 5 \text{ kN}$ 。不计杆 BC 的重量。求钢索 AB 的拉力和杆 BC 所受的力。



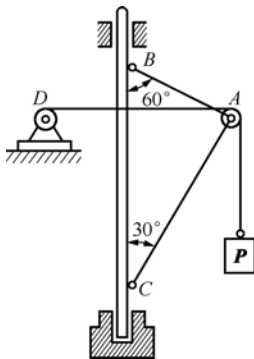
习题图 3-3

- 3-4 习题图 3-4 所示的结构由杆借助钢板连接而成, 试求其中两杆所受的力 F_1 和 F_2 。图中已知力的单位为 kN 。



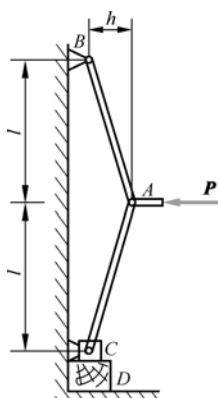
习题图 3-4

- 3-5 如习题图 3-5 所示, 起重机支架的杆 AB 和杆 AC 用铰链支承在可旋转的立柱上, 并在点 A 用铰链互相连接。由绞车 D 水平引出钢索绕过滑轮 A 起吊重物, 如重物重量 $P = 20 \text{ kN}$, 滑轮的尺寸和各杆的自重忽略不计, 试求杆 AB 和杆 AC 所受的力。

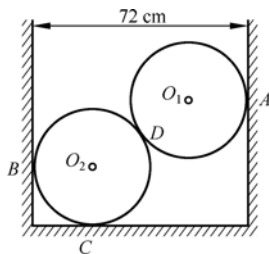


习题图 3-5

- 3-6 压榨机 ABC 尺寸如习题图 3-6 所示, 在铰 A 处作用水平力 P , 点 B 为固定铰链。由于水平力 P 的作用使块 C 压紧物体 D 。若块 C 与墙壁为光滑接触, 试求物体 D 所受的力。
- 3-7 如习题图 3-7 所示, 将两个相同的光滑圆柱放在矩形槽内, 圆柱的半径 $r = 20 \text{ cm}$, 重 $W_1 = W_2 = 600 \text{ N}$ 。求接触点 A 和 B 和 C 的约束力。

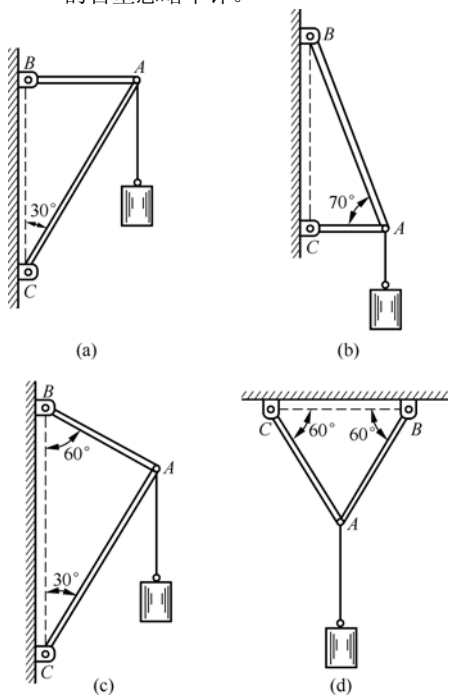


习题图 3-6



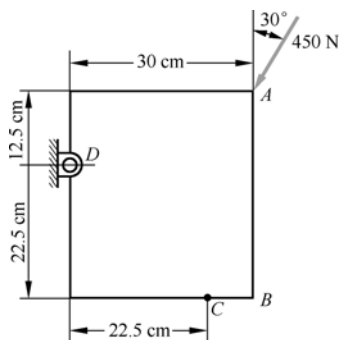
习题图 3-7

3-8 习题图 3-8 所示的支架由杆 AB 和杆 AC 组成, A, B 和 C 三处都为铰接, 在点 A 悬挂重量为 Q 的重物。试求在图示四种情况下, 杆 AB 和杆 AC 受力的大小和拉压情况。杆的自重忽略不计。



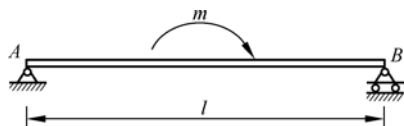
习题图 3-8

3-9 一个 450 N 的力作用在点 A , 方向如习题图 3-9 所示。求: (1) 此力对点 D 的矩; (2) 要得到与(1)相同的力矩, 在点 C 所加水平力的大小和指向; (3) 要得到与(1)相同的力矩, 在点 C 应加的最小的力。



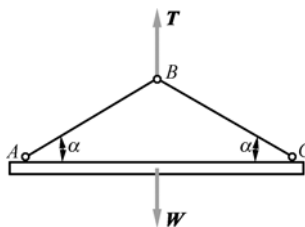
习题图 3-9

3-10 在梁 AB 的中央作用一个力偶矩 $m = 100\text{ kN}\cdot\text{m}$, 转向如习题图 3-10 所示。梁的跨度 $l = 5\text{ m}$, 不计自重。试求支座 A 和 B 的约束力。



习题图 3-10

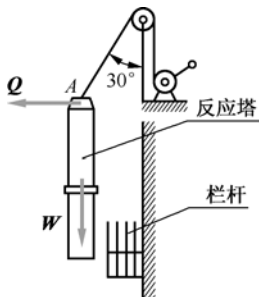
3-11 匀速起吊预制梁如习题图 3-11 所示, 如果要求绳索 AB 和 BC 的拉力不超过 $W/2$ 的 20%, 问角 α 应在什么范围内?



习题图 3-11

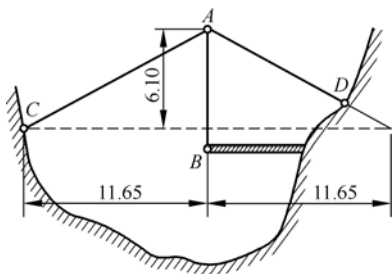
3-12 如习题图 3-12 所示, 化工厂在起吊高压反应塔时, 为了不致碰坏栏杆, 在反应塔的顶点 A 向左施加一个水平力 Q 。已知反应塔重 $W = 30\text{ kN}$ 。若牵引绳与铅垂线的

夹角为 30° ，试求所加的水平力 Q 的大小及绳索的拉力 T 。



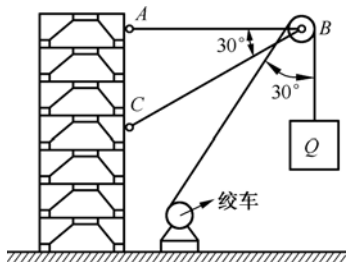
习题图 3-12

3-13 如习题图 3-13 所示，通过山地的铁路，在山谷中的一段用图示支架悬挂。已测得杆 AB 所受拉力为 500 kN ，试求撑杆 AC 和 AD 所受的力。图中的尺寸以 m 计。



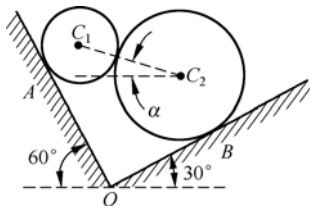
习题图 3-13

3-14 如习题图 3-14 所示，利用托架整体起吊模板，以实现无支架施工。起吊钢丝绳绕过定滑轮 B ，通过绞车把模板吊起。 AB 和 BC 两杆分别用铰链与钢塔连接，杆 AB 水平，杆 AB 与杆 BC 的夹角为 30° 。不计各杆的自重和滑轮 B 的尺寸，模板重 $Q = 12 \text{ kN}$ 。试求 AB 和 BC 两杆所受的力。



习题图 3-14

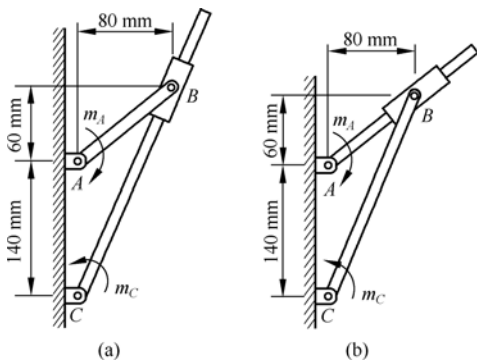
3-15 如习题图 3-15 所示，在两个光滑斜面上放置两个彼此相接触的均质光滑圆柱。中心为 C_1 的圆柱重 $P_1 = 100 \text{ N}$ ，中心为 C_2 的圆柱重 $P_2 = 300 \text{ N}$ ， OA 和 OB 与水平夹角分别为 60° 和 30° 。试求两个圆柱对斜面的压力、两个圆柱彼此间的压力及直线 C_1C_2 与水平面的夹角 α 。



习题图 3-15

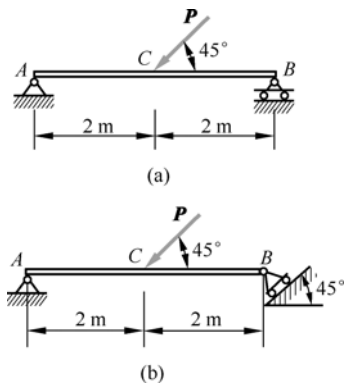
提高题

3-16 如习题图 3-16 所示，两个杆件 AB 和 BC 由光滑的套筒 B 连接。已知力偶矩 m_A 为 $100 \text{ N}\cdot\text{m}$ ，求在图示两种连接方式中使物体系平衡的力偶矩 m_C 和点 C 的约束力。



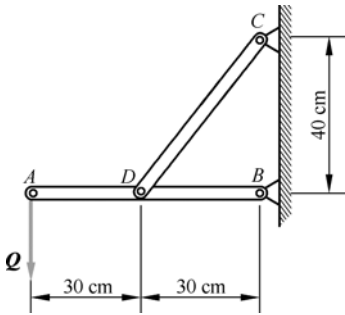
习题图 3-16

3-17 梁 AB 的支撑情况如习题图 3-17 所示，在梁中点作用一个力 $P = 20 \text{ kN}$ ，与梁的轴线成 45° 角。若梁的重量略去不计，试分别求在图(a)、(b)所示两种情形下各支座的约束力。



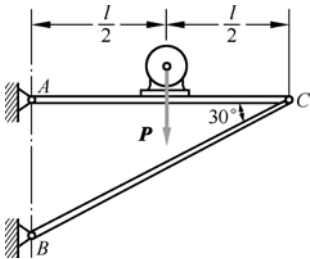
习题图 3-17

3-18 如习题图 3-18 所示, 构架 ABC 在点 A 受力 $Q = 1\text{ kN}$ 作用。杆 AB 和杆 CD 在点 D 用铰链连接, 点 B 和点 C 均为固定铰支座。若不计杆重, 求杆 CD 所受的力和支座 B 的约束力。



习题图 3-18

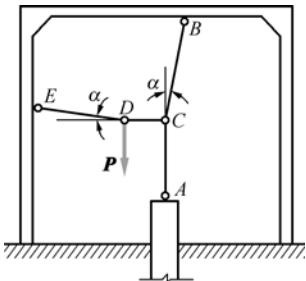
3-19 如习题图 3-19 所示, 电动机重 $P = 5\text{ kN}$, 放在水平梁 AC 的中央。梁的 A 端用铰链固定, 另一端以撑杆 BC 支持, 撑杆与水平梁的夹角为 30° , 忽略梁和撑杆的重量。求撑杆 BC 所受的力。



习题图 3-19

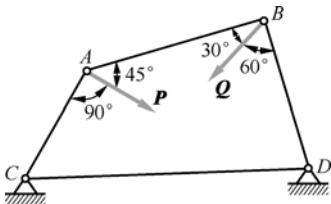
3-20 习题图 3-20 所示的是一个拔桩架, ACB 和

CDE 均为绳子, 当点 D 作用有向下的力 P 时, 即有比 P 大若干倍的力将桩向上拔。若 AC 和 CD 各为铅垂和水平, BC 和 DE 分别与铅垂和水平方向成 $\alpha = 4^\circ$ 角 ($\cot 4^\circ = 14.3$), $P = 400\text{ N}$ 。试求桩顶所受向上的力。



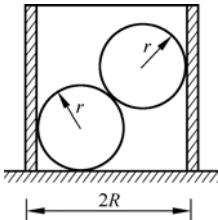
习题图 3-20

3-21 铰接的四连杆机构 CABD 如习题图 3-21 所示, 其中 CD 边固定。在铰链 A 和 B 上分别作用有力 P 和 Q , 方向如图所示。不计各杆自重, 机构在平衡状态。试求力 P 与力 Q 之间的关系。



习题图 3-21

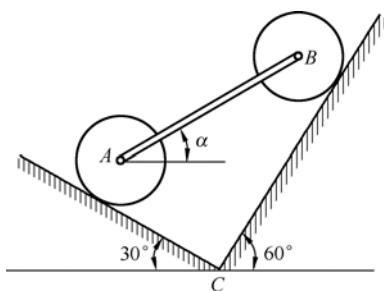
3-22 如习题图 3-22 所示, 无底的圆柱形空桶放于光滑地面上, 内部放有两个圆球。若每个球重为 Q , 内径为 r , 筒的内径为 R ($r < R < 2r$), 各接触面之间的摩擦力可略去不计。试求圆筒不致翻倒的最小重量。



习题图 3-22

3-23 如习题图 3-23 所示, 由杆 AB 在球心铰接

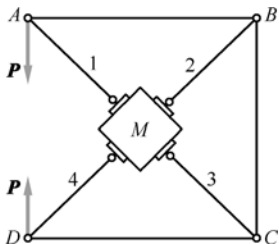
的两个均质球 A 和 B ，分别放在两个相交的光滑斜面上，不计杆 AB 的自重。(1) 设两个球的重量相等，求平衡时的 α 角；(2) 已知球 A 重 W ，要使 $\alpha = 0$ ，求球 B 的重量。



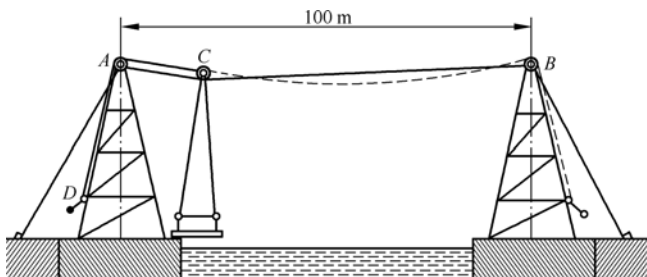
习题图 3-23

研究性题

3-24 习题图 3-24 所示的是用来从四面同时压混凝土立方块的铰接机构。杆 AB 、 BC 和 CD 分别与正方形 $ABCD$ 的三边重合，而杆 1, 2, 3 和 4 的长度彼此相等，并沿着正方形的对角线方向；两个相等且相反的力 P 加在 A 、 D 两点。若力 P 的大小为 50 kN ，求立方体四面所受的压力 N_1 、 N_2 、 N_3 和 N_4 ，以及杆 AB 、 BC 和 CD 所受的力。

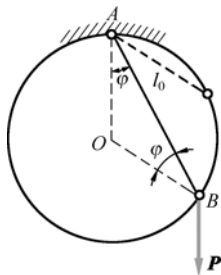


习题图 3-24



习题图 3-26

3-25 如习题图 3-25 所示，固定在铅垂面内半径为 R 的光滑大铁环上套着一个重为 P 的光滑小环 B （大小和重量不计），小环用弹性线 AB 维持平衡，线中拉力的大小 F 与线的伸长量 Δl 成正比，比例系数为 k 。若已知弹性线 AB 的原长 l_0 ($< 2R$) 和比例系数 k ，试求平衡时角 φ 应满足的方程。



习题图 3-25

3-26 如习题图 3-26 所示，吊车过水道时，用小滑车 C 挂在钢丝绳 ACB 上；钢丝绳的两端分别固定在同一水平面上的两个塔顶 A 、 B 两点。若欲使吊车拉向左岸，则利用一个跨过滑轮 A 并绕在铰盘 D 上的绳索 CAD 牵拉。在右岸也有类似的装置，可将吊车拉向右岸。已知 A 、 B 两点之间的距离为 100 m ，钢丝绳 $ACB = 102 \text{ m}$ ；吊车重 50 kN 。略去钢丝绳、绳索和滑车 C 的重量和摩擦。当 $AC = 20 \text{ m}$ 时，求绳索 CAD 与钢丝绳 ACB 的拉力。

力的作用线不全交于一点的平面力系称为平面任意力系。在工程实际中，有时作用在结构上力的作用线虽不在同一平面内，但可以简化为作用在同一平面上的力系，这种力系也可作为平面力系来处理。例如，力系中各力的作用线及其方向的空间分布具有对称性、存在对称面，则这个力系可以等效为对称面内的平面力系。

本章讨论平面任意力系的简化方法和简化结果，并且建立平面任意力系的平衡条件。

4.1 平面任意力系的简化——主矢和主矩

力系向一点简化是一种基本的力系简化方法。此方法的理论基础是力的平移定理。

力的平移定理

可以把作用在点 A 的力 \boldsymbol{F} 平行地移动到任意一点 B ，同时，必须附加一个力偶，该力偶的矩等于原来作用在点 A 的力 \boldsymbol{F} 对点 B 的矩。这样做不改变力对刚体的作用效果。这里，点 A 和 B 不必一定是刚体上的点，可以是刚体之外的任意一点。该定理称为力的平移定理。

证明：如图 4-1(a)所示，力 \boldsymbol{F} 作用于点 A 。任取一点 B ，并在点 B 加上两个等值反向的力 \boldsymbol{F}' 和 \boldsymbol{F}'' ，使它们与力 \boldsymbol{F} 平行，且 $\boldsymbol{F}' = -\boldsymbol{F}''$ ，如图 4-1(b)所示。

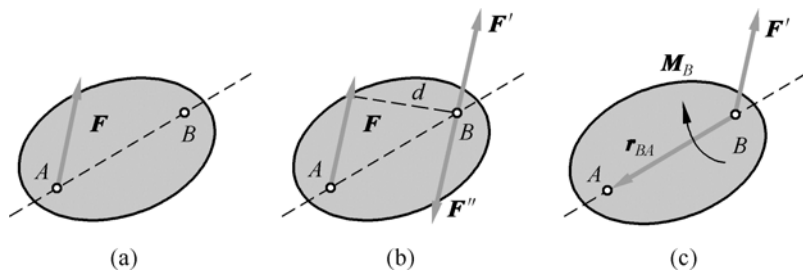


图 4-1 力的平移

显然，三个力 $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}', \boldsymbol{F}''$ 组成一个新的力系。由加减平衡力系公理，该新的力系与原来的一个力 \boldsymbol{F} 等效。该力系可看做是由一个作用在点 B 的力 \boldsymbol{F}' 和一个力偶 $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}'')$ 组成的。这样，就把作用于点 A 的力 \boldsymbol{F} 平移到了另一点 B ，同时要附加上一个相应的力偶，称为附加力偶，如图 4-1(c)所示。显然，附加力偶的矩为

$$M_B = \pm Fd \quad (4-1)$$

式中， d 为点 B 到力 \boldsymbol{F} 作用线的距离。

反过来,根据力的平移定理,也可以将平面内的一个力和一个力偶以作用在同一平面内另一点的力来等效替换。

力的平移定理不仅是力系向一点简化的依据,而且可用来解释一些实际问题。例如,攻丝时,必须用两手握扳手,而且用力要相等。为什么不允许用一只手扳动扳手呢[如图4-2(a)所示]?因为作用在扳手 AB 一端的力 F ,与作用在点 C 的一个力 F' 和一个力偶 M [如图4-2(b)所示]等效,其中力偶 M 使丝锥转动,而力 F' 却往往使攻丝不正,甚至折断工件。



图4-2 攻丝

再如,图4-3(a)所示的厂房柱子受到吊车梁传来的荷载 F 的作用,则 F 除使柱子受压外,还使其弯曲。为了理解该结论,可将力 F 平移到柱的轴线上的点 O ,根据力的平移定理得一个力 F' ,同时还必须附加一个力偶 M [如图4-3(b)所示],其中力 F' 使柱子轴向受压,力偶则使柱子弯曲。

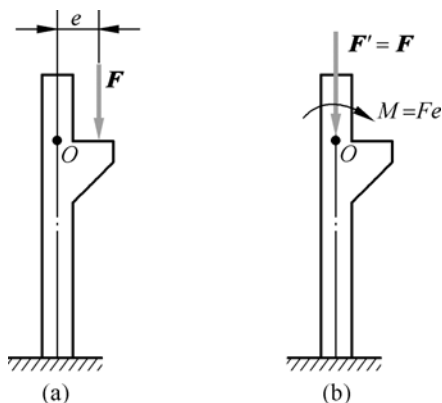


图4-3 厂房柱子受偏心力

平面任意力系向作用面内一点简化——主矢和主矩

设物体上作用由 n 个力 F_1, F_2, \dots, F_n 组成的平面任意力系,如图4-4(a)所示。在平面内任取一点 O ,称为简化中心;应用力的平移定理,把各力都平移到点 O 。这样,得到作用于点 O 的力 F'_1, F'_2, \dots, F'_n ,以及相应地作用于同一平面内的附加力偶 M_1, M_2, \dots, M_n ,如图4-4(b)所示。它们的矩分别等于各力对点 O 的矩,即

$$M_i = M_o(F_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

这样,就可将平面任意力系等效为两个力系:平面汇交力系 F'_1, F'_2, \dots, F'_n 和平面力偶系 M_1, M_2, \dots, M_n 。其中,平面汇交力系可合成为通过点 O 的一个合力 F'_R ,如图4-4(c)所示。因为力矢 $F'_i = F_i$,所以

$$\mathbf{F}'_R = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (4-2)$$

即力矢 \mathbf{F}'_R 等于原来各力的矢量和。 \mathbf{F}'_R 称为原力系的主矢 (principal vector)。

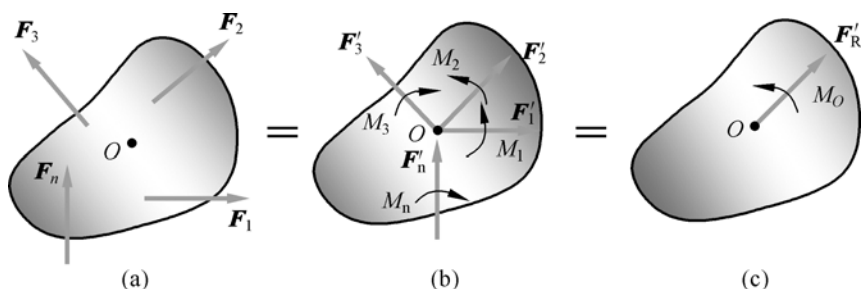


图 4-4 平面任意力系的简化

平面力偶系可合成为一个力偶, 其矩 M_O 等于各附加力偶矩的代数和, 即等于原力系的力 \mathbf{F}_i 对简化中心 O 的矩的代数和:

$$M_O = \sum_{i=1}^n M_O(\mathbf{F}_i) \quad (4-3)$$

M_O 称为原力系对简化中心 O 的主矩 (principal moment)。

上面所得的简化结果可归纳如下:

在一般情形下, 平面任意力系可向作用面内任意一点 O 简化, 得到一个力和一个力偶。其中力等于该力系的主矢, 作用线通过简化中心 O ; 力偶的矩等于该力系对点 O 的主矩。

由于主矢等于各力的矢量和, 所以它与简化中心的选取无关。而主矩等于各力对简化中心的矩的代数和, 所以在一般情况下主矩与简化中心的选取有关, 故必须指出是力系对哪一点的主矩。

应当注意分清主矢与合力、主矩与合力矩的区别。

主矢和主矩的计算

取坐标系 Oxy , 沿 x, y 轴的单位矢量为 \mathbf{i}, \mathbf{j} , 则力系主矢的解析表达式为

$$\mathbf{F}'_R = \mathbf{i} \sum F_{ix} + \mathbf{j} \sum F_{iy} \quad (4-4)$$

于是, 主矢 \mathbf{F}'_R 的大小和方向余弦分别为

$$F'_R = \sqrt{\left(\sum F_{ix}\right)^2 + \left(\sum F_{iy}\right)^2}$$

$$\cos(\mathbf{F}'_R, \mathbf{i}) = \frac{\sum F_{ix}}{F'_R}, \quad \cos(\mathbf{F}'_R, \mathbf{j}) = \frac{\sum F_{iy}}{F'_R}$$

力系对点 O 的主矩的解析表达式为

$$M_O = \sum M_O(\mathbf{F}_i) = \sum (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \quad (4-5)$$

式中, x_i, y_i 为力 \mathbf{F}_i 作用点的坐标。

平面任意力系的简化结果分析

平面任意力系向作用面内一点简化，会得到一个主矢和一个主矩。按主矢和主矩是否为零可以将简化结果分为四种情况。

(1) $F'_R = 0, M_O \neq 0$ ——简化结果：一个力偶。

如果力系的主矢 F'_R 等于零，而力系对于简化中心的主矩 M_O 不等于零，则作用于简化中心 O 的力 F'_1, F'_2, \dots, F'_n 相互平衡。但附加的力偶系并不平衡，合成为一个与原力系等效的合力偶，其矩由式(4-5)给出。因为力偶对于平面内任意一点的矩都相同，所以此时主矩与简化中心的选择无关。

(2) $F'_R \neq 0, M_O = 0$ ——简化结果：一个合力。

如果平面力系向点 O 简化的结果为主矩 M_O 等于零、主矢 F'_R 不等于零，则附加力偶系互相平衡，只有一个与原力系等效的合力，其作用线通过选定的简化中心 O 。显然，若选取不同的简化中心 O' ，则可能有 $M_{O'} \neq 0$ 。也就是说，使主矩为零的简化中心是一种特殊情况。更一般的是主矩不为零的情况，其分析如下。

(3) $F'_R \neq 0, M_O \neq 0$ ——进一步简化结果：一个合力。

如果平面力系向点 O 简化的结果是主矢 F'_R 和主矩 M_O 都不等于零，则可进一步做如下处理：将矩为 M_O 的力偶用大小相等、方向相反的两个力 F_R 和 F''_R 等效，并使 $F''_R = -F'_R$ ，如图 4-5(b)所示。再去掉平衡力系 (F'_R, F''_R) ，于是就将作用于点 O 的力 F'_R 和力偶 (F'_R, F''_R) 合成为一个作用在点 O' 的力 F_R ，如图 4-5(c)所示。力 F_R 就是原力系的合力。合力矢等于主矢；合力的作用线在点 O 的哪一侧，则需要根据主矢和主矩的方向确定；合力作用线到点 O 的距离可按下式计算：

$$d = \frac{M_O}{F_R}$$

可见，将力系向点 O' 简化就得到情况(2)的结果。

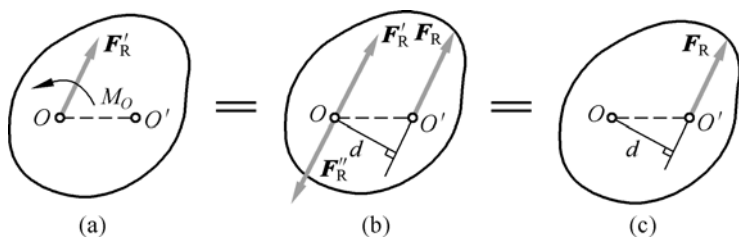


图 4-5 力系的进一步简化

(4) $F'_R = 0, M_O = 0$ ——结果：力系平衡。

如果力系的主矢 F'_R 、主矩 M_O 均等于零，则称原力系为平衡力系，这种情形将在下一节详细讨论。

归结起来，平面任意力系在作用面内简化的最终结果有以下三类：

(1) 一个力偶： $F'_R = 0, M_O \neq 0$ ；

(2) 一个合力： $F'_R \neq 0, M_O = 0$ 或 $F'_R \neq 0, M_O \neq 0$ (需要进一步确定新的简化中心进行简化)；

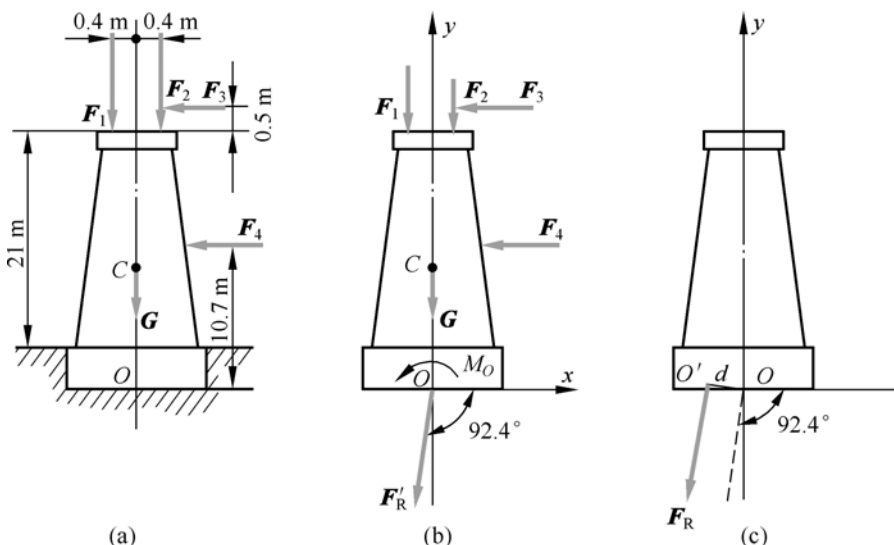
或者说若平面任意力系的主矢不为零，则这个力系一定可以等效为一个集中力；

(3) 平衡力系： $F'_R = 0, M_O = 0$ 。

知道了一个复杂平面任意力系的简化结果，就可以进一步分析这个复杂力系对物体的作用效果。后面的动力学将告诉我们：主矢控制物体移动速度的变化快慢，主矩控制物体转动角速度的变化快慢。这就是简化力系的目的。

例题 4-1

如例题图 4-1(a)所示，一个铁路桥墩顶部受到两边桥梁传来的铅垂力 $F_1 = 1940 \text{ kN}$ 和 $F_2 = 800 \text{ kN}$ ，以及机车传递的掣动力 $F_3 = 193 \text{ kN}$ 。桥墩自重 $G = 5280 \text{ kN}$ ，风力 $F_4 = 140 \text{ kN}$ 。各力作用线位置如图所示。试求：(1) 力系向基础中心 O 简化的结果；(2) 若能简化为一个力，试确定合力作用线的位置。



例题图 4-1

解：

(1) 向桥墩基础中心 O 简化。

以点 O 为原点建立坐标系，如例题图 4-1(b)所示，则主矢 F'_R 的大小为

$$F'_{Rx} = \sum F_{ix} = -F_3 - F_4 = -333 \text{ kN}, \quad F'_{Ry} = \sum F_{iy} = -F_1 - F_2 - G = -8020 \text{ kN}$$

$$F'_R = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2} = 8027 \text{ kN}$$

由于 F'_{Rx}, F'_{Ry} 均为负值，所以 F'_R 应在第三象限，其方向与 x 轴的夹角 α 为

$$\cos(F'_R, i) = \frac{\sum F_{xi}}{F'_R} = -0.0415, \quad \alpha = -92.4^\circ$$

力系对点 O 的主矩为

$$M_O = \sum M_O(F_i) = 0.4F_1 - 0.4F_2 + 21F_3 + 10.7F_4 = 6103.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(2) 进一步简化为一个合力。

因为 $F'_R \neq 0$, $M_O \neq 0$, 所以力系还可进一步简化为一个合力 F_R , 其大小和方向与主矢 F'_R 相同, 作用点到点 O 的垂直距离为

$$d = \frac{|M_O|}{F'_R} = \frac{6103.5}{8027} = 0.76 \text{ m}$$

因为 M_O 为正值 (即逆时针转动), 所以顺着主矢 F'_R 的箭头看, 合力 F_R 应位于简化中心 O 的右侧, 如例题图 4-1(c) 所示。

平面任意力系的合力矩定理

由上面分析可知, 当力系的主矢和主矩都不为零时, 即 $F'_R \neq 0$, $M_O \neq 0$ 时, 力系还可进一步简化为一个合力 F_R , 如图 4-5 所示。合力 F_R 对点 O 的矩为

$$M_O(F_R) = F_R d = M_O$$

式(4-5)表明

$$M_O = \sum M_O(F_i)$$

所以

$$M_O(F_R) = \sum M_O(F_i)$$

由于简化中心 O 是任意选取的, 故上式对任意选取的简化中心 O 都成立, 所以说上式具有普遍的意义。于是得到如下平面任意力系的合力矩定理: 平面任意力系的合力对作用面内任意一点的矩等于各力对同一点的矩的代数和。

例题 4-2

如例题图 4-2 所示, 简支梁受三角形荷载作用, 最大荷载集度为 q_0 (单位: N/m)。求其合力的大小和作用线的位置。

分析: 梁受分布载荷 $q(x)$ 作用, 需要采用微积分的思想分析。可以选取微分 dx 长的一段梁, 其上的载荷可看做大小为 $q(x)dx$ 的集中力, 利用积分求梁上所有这样的集中力的主矢, 再根据合力矩定理, 即可得合力及其作用线的位置。

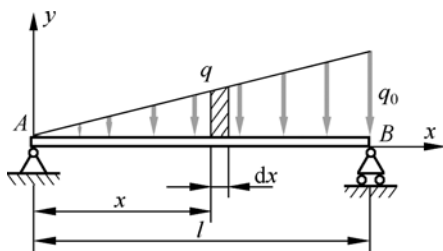
解:

(1) 求合力。

设梁距 A 端 x 处的荷载集度为 $q(x)$, 则 $q(x) = \frac{x}{l} q_0$, 于是微段 dx 上所受的集中力为

$$dF = q(x)dx = \frac{x}{l} q_0 dx \quad (a)$$

简支梁所受三角形荷载力系的主矢为



例题图 4-2

$$F = \int_0^l dF = \int_0^l q(x)dx = \int_0^l \frac{x}{l} q_0 dx = \frac{q_0 l}{2} \quad (\text{b})$$

显然，这个力系的主矢不为零，故存在合力。

(2) 利用合力矩定理确定合力作用线。

设合力作用线距端点 A 的距离为 d ，由合力矩定理得

$$Fd = \int_0^l q(x)xdx$$

将式(a)和式(b)代入上式，得合力作用线距端点 A 的距离为

$$d = \frac{2}{3}l$$

讨论：

例题 4-2 中的分布载荷若看成是一系列连续分布的集中力 $q(x)dx$ 组成的力系，则该力系中所有力的作用线均相互平行。这种作用线相互平行的力系称为平行力系 (parallel forces)，这是平面任意力系的一种特殊情形。如图 4-6 所示，设在 Oxy 坐标下，有一条作用线均与 y 轴平行的力系 F_1, F_2, \dots, F_n 。该力系的主矢大小等于所有力在 y 轴上投影的代数和（即 $F_R = \sum F_i$ ），方向平行于各力的作用线且由正负号决定。若主矢不为零，则该力系可以合成为一个合力，其大小方向与主矢相同，其作用线的 x 坐标由合力矩定理得

$$x_0 = \frac{M_O}{F_R} = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i} \quad (4-6)$$

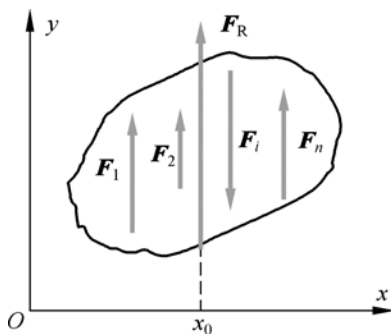


图 4-6 平面平行力系及其合力

固定端约束

作为平面任意力系简化的应用，下面分析固定端约束的受力特点。工程中物体的一段插入到另一个物体上，如图 4-7(a)所示，称为固定端 (fix end) 约束。固定端约束的受力特点是：被约束物体在固定端处受平面任意力系作用，它使得物体既不能沿任一方向移动，又不能绕任一点转动，如图 4-7(b)所示。因此，由平面任意力系简化理论，若将固定端处的约束力向固定端点 A 处简化，则可得到一个力 F_A 和一个力偶 M_A ，如图 4-7(c)所示。一般将力 F_A 进行正交分解，以垂直的投影 F_{Ax} 和 F_{Ay} 代替，如图 4-7(d)所示。

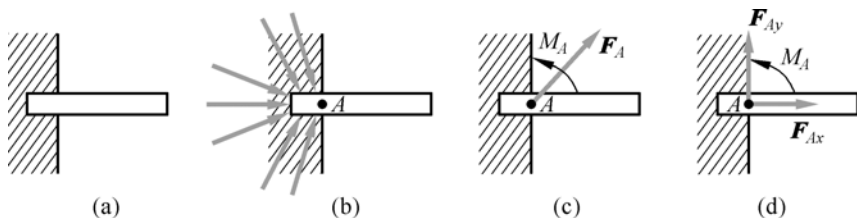


图 4-7 平面固定端约束及约束力简化

如图 4-8(a)所示的平面水平导向轴承（或称为水平滑动铰支座）也可以通过力系简化分析其约束的受力特点。由于限制了竖直方向的移动和转动，而允许水平方向的移动，所以 A 处的约束力可以简化为一个力偶 M_A 和垂直方向的力 F_{Ay} 。其计算简图和受力如图 4-8(b)或图 4-8(c)所示。竖向导向轴承（或称为竖向滑动铰支座）也具有类似的性质，如图 4-8(d)、(e)所示。

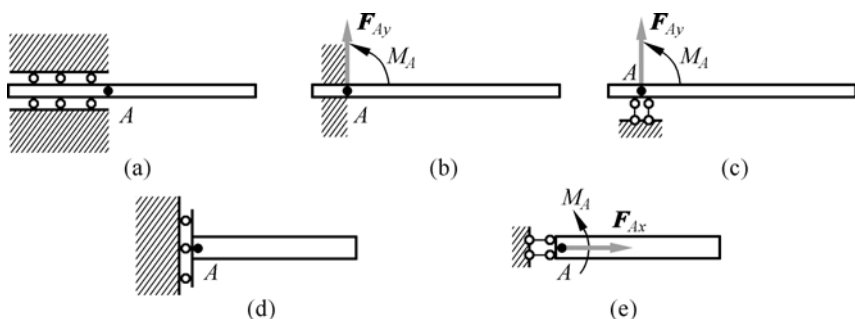


图 4-8 平面导向轴承及约束力简化

4.2 平面任意力系的平衡分析

上一节讨论的力系简化为力系的平衡分析奠定了基础。本节将给出力系平衡的基本方程和分析方法。

平衡方程的基本形式

前面讨论的力系向一点简化的第 4 种情况——主矢和主矩同时等于零，即

$$\mathbf{F}'_R = \sum \mathbf{F}_i = 0, \quad M_O = \sum M_O(\mathbf{F}_i) = 0 \quad (4-7)$$

称该力系为平衡力系。

显然，主矢等于零，表明作用于简化中心 O 的汇交力系为平衡力系；主矩等于零，表明附加力偶系也是平衡力系，所以原力系必为平衡力系。因此，式(4-7)为平面任意力系平衡的充分条件。

由上一节分析结果可见：若主矢和主矩有一个不等于零，则力系应简化为合力或合力偶；若主矢与主矩都不等于零时，可进一步简化为一个合力。上述情况下力系都不能平衡，只有当主矢和主矩都等于零时，力系才能平衡，因此式(4-7)又是平面任意力系平衡的必要条件。

不难证明，若力系的主矢和对一点的主矩同时为零，则该力系对其他任意点的主矩也为零。

于是, 平面任意力系平衡的充分必要条件是: 力系的主矢和对于任意一点的主矩同时为零。

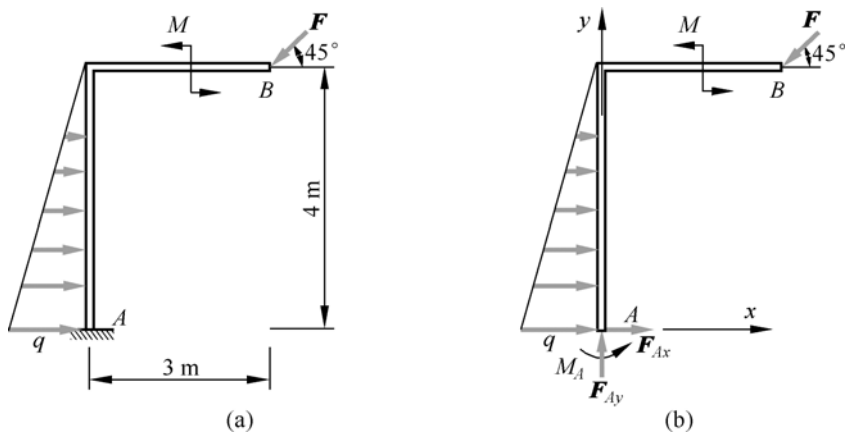
平衡条件可用解析式表示。在直角坐标系 Oxy 中, 平衡条件式(4-7)可写成投影式 (略去下标 i):

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_O(F) = 0 \quad (4-8)$$

即平面任意力系平衡的解析条件是: 所有各力在两个任选的坐标轴上投影的代数和分别等于零, 各力对于任意一点的矩的代数和也等于零。式(4-8)的三个方程是相互独立的, 称为平衡方程的基本形式, 可由此求解三个未知数。实际上, 可以任选两个相交的坐标轴建立力投影方程。

例题 4-3

如例题图4-3(a)所示的刚架, 已知: $q = 3 \text{ kN/m}$, $F = 6\sqrt{2} \text{ kN}$, $M = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 不计刚架的自重, 试求固定端 A 的约束力。



例题图 4-3

解:

(1) 受力分析。选刚架 AB 为研究对象, 作用在其上的主动力有: 三角形荷载 q 、集中荷载 F 、力偶矩 M ; 约束力为固定端 A 处的两个垂直分力 F_{Ax} 和 F_{Ay} 及力偶矩 M_A , 如例题图 4-3(b) 所示。

(2) 建立坐标系, 列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + \frac{1}{2}q \times 4 - F \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - F \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad M_A - \frac{1}{2}q \times 4 \times \frac{1}{3} \times 4 - M - 3F \sin 45^\circ + 4F \cos 45^\circ = 0$$

由上述三式解得固定端 A 的约束力为

$$F_{Ax} = 0, \quad F_{Ay} = 6 \text{ kN (向上)}, \quad M_A = 12 \text{ kN} \cdot \text{m (逆时针)}$$

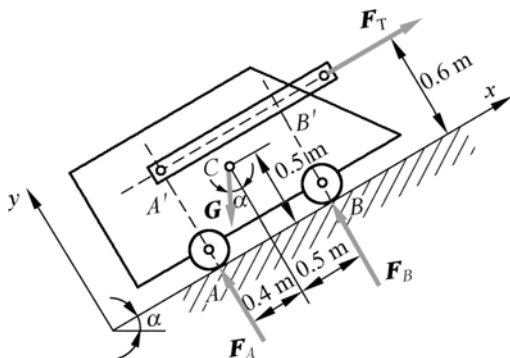
讨论:

物体受力平衡分析包括两大步骤: ①选取研究对象, 画出受力图; ②列出平衡方程, 解出未知量。

解题时应当注意, 选取适当的坐标轴和力矩中心, 可以减少每个平衡方程中未知量的数目, 从而简化求解过程。在平面任意力系情形下, 矩心应取在两个未知力的交点上, 而坐标轴应当与尽可能多的未知力相垂直。如例题 4-3, 矩心取在点 A , 未知力 F_{Ax} 和 F_{Ay} 都不出现在力矩方程中; 坐标轴分别垂直于力 F_{Ax} 和 F_{Ay} , 使每个力投影方程中只出现一个未知量。

例题 4-4

如例题图 4-4 所示, 上料小车重 $G = 10 \text{ kN}$, 沿着与水平成 $\alpha = 60^\circ$ 的轨道匀速提升, 料车的重心在点 C 。略去车轮与轨道的摩擦力, 试求提升料车的牵引力 F_T 和料车对轨道的压力。



例题图 4-4

解:

(1) 受力分析。取料车为研究对象, 作用在其上的力有重力 G 、牵引力 F_T 和轨道对车轮的约束力 F_A 和 F_B , 如例题图 4-4 所示。

(2) 建立图示坐标系, 列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \quad F_T - G \sin 60^\circ = 0 \quad (\text{a})$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_A + F_B - G \cos 60^\circ = 0 \quad (\text{b})$$

$$\sum M_B = 0, \quad -F_T \times 0.6 + G \sin 60^\circ \times 0.5 + G \cos 60^\circ \times 0.5 - F_A \times 0.9 = 0 \quad (\text{c})$$

按照式(a)、式(c)、式(b)的顺序依次求解 (不需要解联立方程), 得

$$F_T = G \sin 60^\circ = 8.66 \text{ kN}$$

$$F_A = \frac{1}{0.9} (-F_T \times 0.6 + F_G \sin 60^\circ \times 0.5 + G \cos 60^\circ \times 0.5) = 1.82 \text{ kN}$$

$$F_B = G \cos 60^\circ - F_A = 3.18 \text{ kN}$$

讨论:

(1) 可以选取其他点作为矩心建立力矩方程, 用来校验计算结果是否正确。如例题 4-4 中取点 C 为矩心, 则由关于点 C 的合力矩为

$$\sum M_C = -F_A \times 0.4 + F_B \times 0.5 - F_T \times 0.1 = -1.82 \times 0.4 + 3.18 \times 0.5 - 8.66 \times 0.1 = 0$$

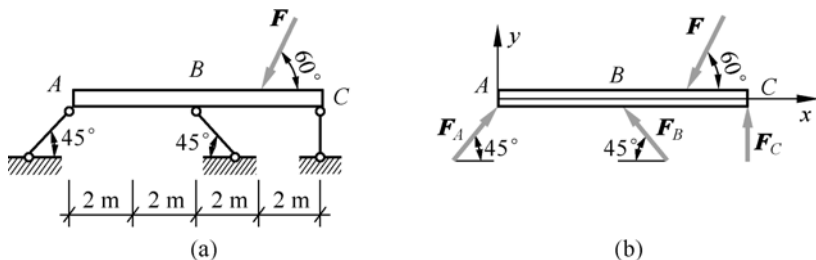
满足力矩平衡方程, 说明上述计算结果无误。

(2) 注意在求解平衡方程时, 尽量每次只求解一个未知量。如例题 4-4 中, 先求解(a)获得 F_T , 再求解(c)得到 F_A , 最后求解(b)得到 F_B 。

(3) 请读者思考, 是否可以取 F_T 和 F_A (或 F_B) 的作用线交点 A' (或 B') 为矩心, 建立力矩平衡方程代替式(c), 从而使其只包含一个未知力 F_B (或 F_A) ?

例题 4-5

如例题图 4-5(a)所示, 梁 AC 用三根支座链杆连接, 受到一个集中力 $F = 50 \text{ kN}$ 作用。不计梁及链杆的自重, 试求每根支座链杆的约束力。



例题图 4-5

解:

(1) 受力分析。取梁 AC 为研究对象, 受力如例题图 4-5(b)所示, 其中支座链杆为二力杆。

(2) 建立坐标系, 列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \quad F_A \cos 45^\circ - F_B \cos 45^\circ - F \cos 60^\circ = 0 \quad (a)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_A \sin 45^\circ + F_B \sin 45^\circ + F_C - F \sin 60^\circ = 0 \quad (b)$$

$$\sum M_A = 0, \quad F_B \times \sin 45^\circ \times 4 + F_C \times 8 - F \sin 60^\circ \times 6 = 0 \quad (c)$$

联立求解上述三个方程, 得

$$F_A = 21.99 \text{ kN}, \quad F_B = -13.37 \text{ kN}, \quad F_C = 37.2 \text{ kN}$$

讨论:

关于例题 4-5, 请读者思考以下问题:

- (1) 任取一点为矩心 (如点 B) 校验上述计算结果;
- (2) 是否可以选取合适的坐标建立力投影方程, 使其含较少的未知力, 以代替含有 3 个未知力的方程(b)?
- (3) 是否可以选取合适的矩心建立力矩方程, 使其只含有一个未知力?

平衡方程的其他形式：二矩式和三矩式

从前面的分析可以看到，在形如式(4-8)的平衡方程中，第三个力矩平衡方程中的矩心是人为选取的，可以选出无穷多个，从而列出无穷多个这样的力矩平衡方程。是否可以用这些力矩平衡方程代替式(4-8)中前两个力投影方程？下面的分析告诉我们，在一定条件下是可以的，并且可以简化计算。这导致在平面力系的平衡问题中，除形如式(4-8)的平衡方程外，还有两种其他形式的平衡方程，分别是二矩式和三矩式平衡方程。

二矩式指三个平衡方程中有两个力矩方程和一个投影方程，即

$$\sum F_x = 0, \sum M_A(F) = 0, \sum M_B(F) = 0 \quad (4-9)$$

式中， x 轴不得垂直于 A, B 两点的连线。

证明：首先将一平面任意力系向点 A 简化，一般可得到过点 A 的一个力和一个力偶。若 $\sum M_A = 0$ 成立，则力系只能简化为通过点 A 的合力 F_R 或者平衡。如果 $\sum M_B = 0$ 又成立，说明 F_R 必通过点 B 。可见，合力 F_R 的作用线必为 AB 连线，如图 4-9 所示。又因 $F_{Rx} = \sum F_x = 0$ ，即合力 F_R 在 x 轴上的投影为零，因 AB 连线不垂直于 x 轴，所以合力 F_R 亦不垂直于 x 轴，于是由 $F_{Rx} = 0$ 可推得 $F_R = 0$ ，可见满足方程(4-9)的平面任意力系必为平衡力系。反之，平衡力系亦满足方程(4-9)。

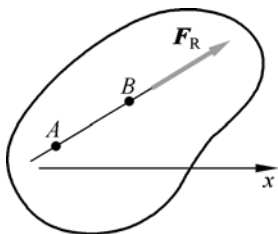


图 4-9 二矩式平衡方程证明

三矩式指三个平衡方程全部为力矩式方程，即

$$\sum M_A(F) = 0, \sum M_B(F) = 0, \sum M_C(F) = 0 \quad (4-10)$$

式中， A, B, C 三点不得共线。证明同上，请读者自行完成。

总之，平面任意力系的平衡方程共有三种形式，但求解时应根据具体问题而定，只能选择其中的一种形式列出三个平衡方程，求解三个未知力。若列第四个方程，则不是独立的，是前三个的线性组合。同时，在选择平衡方程的具体形式时，应尽可能地使一个方程含有一个未知力，避免联立求解，这一点需要多做练习才能熟练掌握。

例题 4-6

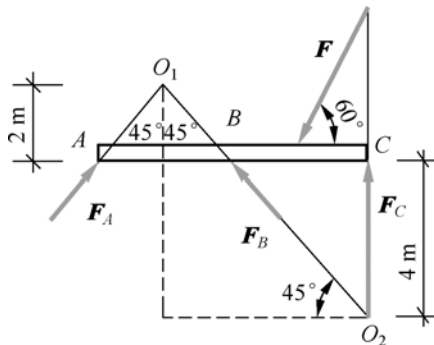
试用二矩式平衡方程求解例题 4-5，要求每个方程只出现一个未知量。

解：

(1) 受力分析。取梁 AC 为研究对象，其受力如例题图 4-6 所示。

(2) 列平衡方程。

取 F_A 和 F_B 的交点 O_1 为矩心（如例题图 4-6 所示），列平衡方程并求解得



例题图 4-6

$$\sum M_{O_1} = 0, \quad F_C \times 6 - F \cos 60^\circ \times 2 - F \sin 60^\circ \times 4 = 0$$

$$F_C = \frac{2F \cos 60^\circ + 4F \sin 60^\circ}{6} = \frac{2 \times 50 \times 0.5 + 4 \times 50 \times 0.866}{6} = 37.2 \text{ kN}$$

取 F_B 与 F_C 的交点 O_2 为矩心（如本例题图所示），列平衡方程并求解得

$$\sum M_{O_2} = 0 \quad -F_A \times \frac{6}{\cos 45^\circ} + F \cos 60^\circ \times 4 - F \sin 60^\circ \times 2 = 0$$

$$F_A = \frac{(4F \cos 60^\circ + 2F \sin 60^\circ)}{6} = \frac{(4 \times 50 \times 0.5 + 2 \times 50 \times 0.866) \times 0.707}{6} = 21.99 \text{ kN}$$

另由水平方向的力投影方程求解得

$$\sum F_x = 0, \quad F_A \cos 45^\circ - F_B \cos 45^\circ - F \cos 60^\circ = 0$$

$$F_B = \frac{F_A \cos 45^\circ - F \cos 60^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{21.99 \times 0.707 - 50 \times 0.5}{0.707} = -13.37 \text{ kN}$$

校核

$$\begin{aligned} \sum F_y &= F_A \sin 45^\circ + F_B \sin 45^\circ + F_C - F \sin 60^\circ \\ &= 21.99 \times 0.707 - 13.37 \times 0.707 + 37.2 - 50 \times 0.866 = 0 \end{aligned}$$

说明计算无误。

讨论：

(1) 与例题 4-5 的解法相比，本例题通过合理选取矩心，利用力矩方程，避免了求解联立方程组，因而明显降低了求解的难度。同理，例题 4-4 也可依次选取 A' 和 B' 为矩心，建立力矩方程直接求解 F_A 和 F_B 。

(2) 读者也可选取 F_A 和 F_C 的交点为矩心列力矩方程求得 F_B ，但由于已经求得了两个未知力，所以直接用力投影方程求解也不增加难度。可见，在实际应用中，二矩式的平衡方程最经常用到。

4.3 刚体系的平衡分析——静定和超静定问题

工程中的大多结构都是由多个构件组成的复杂系统。当系统处于静止状态时，不仅整体是平衡的，而且局部也是平衡的，即组成该系统的每一个刚体都处于静止状态。前面已经指出，对于每一个受平面任意力系作用的刚体，均可写出三个独立的平衡方程。因此，若一个系统由 n 个构件组成，则共有 $3n$ 个独立的平衡方程（对某些特殊情况，如汇交力系或平行力系，平衡方程的数目相应减少）。当未知量的数目等于独立平衡方程的数目时，所有未知量都能由平衡方程求出，这样的问题称为静定问题（statically determinate problem）。显然，前面的例题都是静定问题。

在工程实际中，有时为了提高结构的刚度和坚固性，常常增加多余的约束，因而增加了未知约束力的数目，从而使平衡方程的数目少于未知量的数目。这样就不能仅由平衡方程求

出全部未知量,这样的问题称为**超静定问题**或**静不定问题**(statically indeterminate problem)。下面举出一些静定和超静定问题的例子。

如图 4-10(a)所示,用两根杆悬挂一个重物,铰接点 A 受到由两个未知的约束力和重物的拉力组成的平面汇交力系作用,共有两个平衡方程,可求解两个未知量,因此是静定的。若改用三根杆悬挂重物,如图 4-10(b)所示,则未知的约束力有三个,而平衡方程只有两个,因此是超静定的。

再如,用两个轴承支承一根轴,如图 4-10(c)所示,未知的约束力有两个,由于轴受平面平行力系作用,共有两个平衡方程,因此是静定的。若用三个轴承支承,如图 4-10(d)所示,则未知的约束力有三个,而平衡方程只有两个,因此是超静定的。

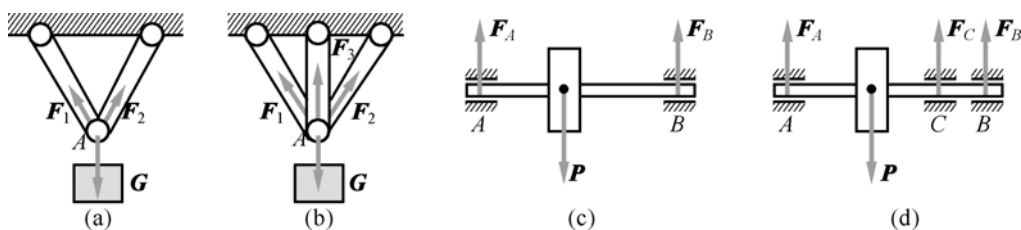


图 4-10 静定和超静定问题

对于超静定问题,必须考虑物体因受力作用而产生的变形,建立某些补充方程后,才能使方程的数目等于未知量的数目。这类问题已超出了理论力学的范围,必须在材料力学、结构力学等后续力学课程中研究。可见,超静定问题的分析要复杂得多。因此,尽管工程中大部分结构或机械的受力属于超静定问题,但为了简化计算,常根据实际情况,在工程允许的范围内尽可能近似为静定问题研究。如图 4-11(a)所示的梁 AB ,实际建造时为了牢固,其两端一般都要嵌入墙内。若按两端固定约束处理,则显然是超静定问题,因为未知约束力有 6 个,而平衡方程只有 3 个。考虑到两端对梁转动的约束较弱,所以可以将两端简化为固定铰支约束,如图 4-11(b)所示,但此时仍然有 4 个未知量,依然是超静定问题。若进一步考虑实际的梁主要是弯曲变形,水平方向的变形影响不大,所以可以将一端(如 B 端)简化为活动铰支约束,则梁的受力就可按静定问题分析,如图 4-11(c)所示,这样就大大简化了计算过程。

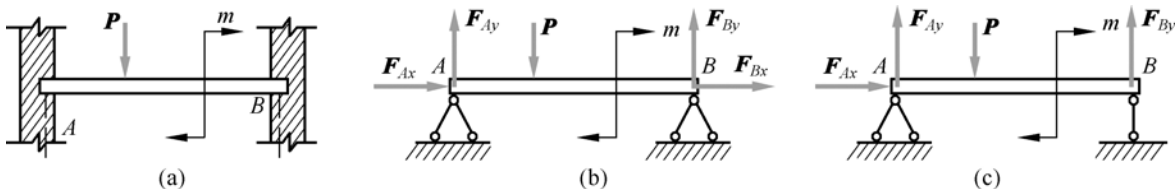
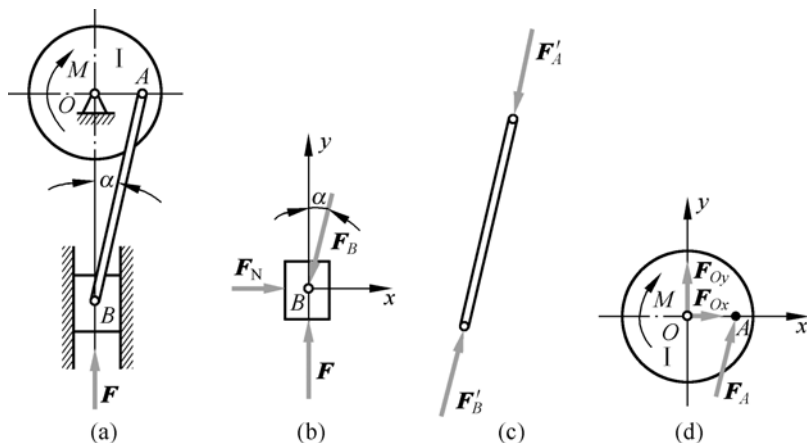


图 4-11 梁的约束简化

分析物体系的平衡,首先应确定系统是静定的,还是超静定的。对于静定的物体系,可以直接作为刚体系分析每个物体的受力。分析时可以选每个物体为研究对象,列出全部平衡方程,然后求解。也以可取整个系统(或由其中部分物体组成的子系统)为研究对象,列出平衡方程,这样的方程因不包含内力(或只包含部分内力),式中未知量较少。在选择研究对象和列平衡方程时,应使每一个方程中的未知量个数尽量少,最好只含有一个未知量,以避免求解联立方程。

例题 4-7

例题图 4-7(a)所示的是曲轴冲床简图, 由轮 I、连杆 AB 和冲头 B 组成。 A 、 B 两处为铰链连接。 $OA = R$, $AB = l$ 。如忽略摩擦和物体的自重, 当 OA 在水平位置、冲压阻力为 F 时, 系统处于平衡状态。求: (1) 作用在轮 I 上的力偶矩 M ; (2) 轴承 O 处的约束力; (3) 连杆 AB 受的力; (4) 冲头给导轨的侧压力。



例题图 4-7

分析: 该系统有冲头 B 、连杆 AB 和轮 I 三个构件组成, 其中冲头 B 受到汇交力系的作用, 连杆 AB 为二力杆, 轮 I 受到平面任意力系的作用。共有 6 个平衡方程; 未知力有主动力 M 、导轨对冲头的约束力 (1 个)、连杆的约束力 (1 个)、轴承的约束力 (2 个), 共 6 个未知量, 所以是静定问题。

解:

(1) 首先, 以冲头为研究对象。冲头受冲压阻力 F 、导轨约束力 F_N 及连杆 (二力杆) 的作用力 F_B 作用, 受力如例题图 4-7(b) 所示, 为一个平面汇交力系。设连杆与铅垂线间的夹角为 α , 按图示坐标轴列平衡方程

$$\sum F_x = 0, F_N - F_B \sin \alpha = 0 \quad (\text{a})$$

$$\sum F_y = 0, F - F_B \cos \alpha = 0 \quad (\text{b})$$

由式(b)得

$$F_B = \frac{F}{\cos \alpha}$$

F_B 为正值, 说明假设的方向正确, 即连杆受压力, 如例题图 4-7(c) 所示。代入式(a)得

$$F_N = F \tan \alpha = F \frac{R}{\sqrt{l^2 + R^2}}$$

冲头对导轨的侧压力大小就等于 F_N 。

(2) 再以轮 I 为研究对象。轮 I 受平面任意力系作用, 包括矩为 M 的力偶, 连杆作用力

F_A ($F_A = F'_A = F_B$), 以及轴承的约束力 F_{Ox}, F_{Oy} , 如例题图 4-7(d) 所示。按图示坐标轴列平衡方程为

$$\sum M_O = 0, \quad F_A \cos \alpha \cdot R - M = 0 \quad (c)$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ox} + F_A \sin \alpha = 0 \quad (d)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Oy} + F_A \cos \alpha = 0 \quad (e)$$

由式(c)得

$$M = FR$$

由式(d)得

$$F_{Ox} = -F_A \sin \alpha = -F \frac{R}{\sqrt{l^2 + R^2}}$$

由式(e)得

$$F_{Oy} = -F_A \cos \alpha = -F$$

负号说明 F_{Ox}, F_{Oy} 的方向与例题图 4-7(d) 中假设的方向相反。

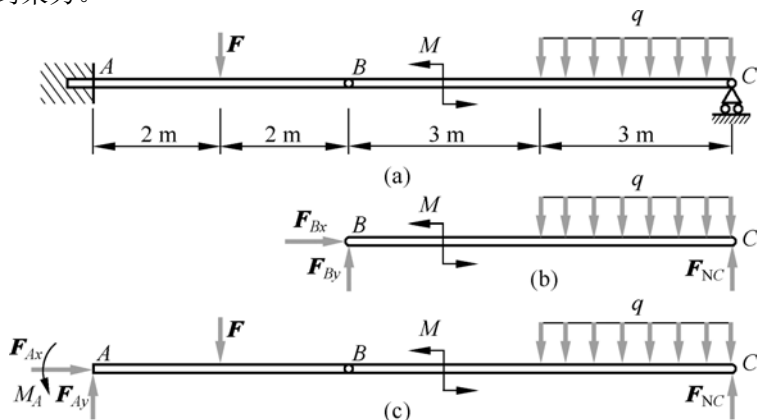
讨论:

(1) 求解时应从能够求得解答的物体 (包括整体系统、子系统、单个构件) 平衡分析入手。如本例中从冲头的平衡入手, 可以直接求得其上的所有未知力, 然后在逐个刚体求解。先从轮 I 入手, 则不能求得其上的所有作用力。

(2) 本例也可先取整个系统为研究对象, 求得导轨对冲头的约束力 F_N 和轴承对轮 I 的约束力 F_{Ox}, F_{Oy} , 再取冲头为研究对象求解连杆 AB 受的力 F_B 。请读者自己尝试。

例题 4-8

例题图 4-8 所示的水平梁由 AB、BC 两部分组成, A 处为固定端约束, C 处为铰链连接, B 端为滚动铰支座。已知: $F = 10 \text{ kN}$, $q = 20 \text{ kN/m}$, $M = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 几何尺寸如图所示。试求 A、C 处的约束力。



例题图 4-8

分析：该结构系统由两个构件组成，受平面任意力系的作用，有 6 个平衡方程；未知约束力包括固定端 A 的 3 个、铰接点 B 的 2 个和活动铰支座 C 的 1 个，共 6 个，所以是静定问题。 A , C 处的约束力共有 4 个，所以不能由整体平衡直接确定，必须选取系统中的某个构件进行分析。例题 4-7 告诉我们，从能够求得解答的物体入手将使分析求解过程更简单。显然，梁 BC 上的约束力有 3 个，可以通过平衡方程求得。

解：

(1) 选取梁 BC 为研究对象，受力如例题图 4-8(b) 所示，其中主动力有：力偶 M 和均布荷载 q ；约束力有： B 端的两个垂直分力 F_{Bx} , F_{By} 和 C 端的法向力 F_{NC} 。列平衡方程

$$\sum M_B = 0, \quad 6F_{NC} + M - 3q \times \left(3 + \frac{3}{2}\right) = 0$$

解得

$$F_{NC} = 43.33 \text{ kN}$$

(2) 选取整体为研究对象，受力如例题图 4-8(c) 所示，包括主动力：集中力 F 、力偶 M 和均布荷载 q ；约束力：固定端 A 两个垂直分力 F_{Ax} , F_{Ay} 和力偶矩 M_A ， C 处的法向力 F_{NC} 。列平衡方程得

$$\sum M_A(F) = 0, \quad M_A - 2F + 10F_{NC} + M - 3q \times \left(7 + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - F - 3q + F_{NC} = 0$$

由上述三式解得 A , C 端的约束力为

$$M_A = 86.7 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad F_{Ax} = 0, \quad F_{By} = 26.67 \text{ kN}$$

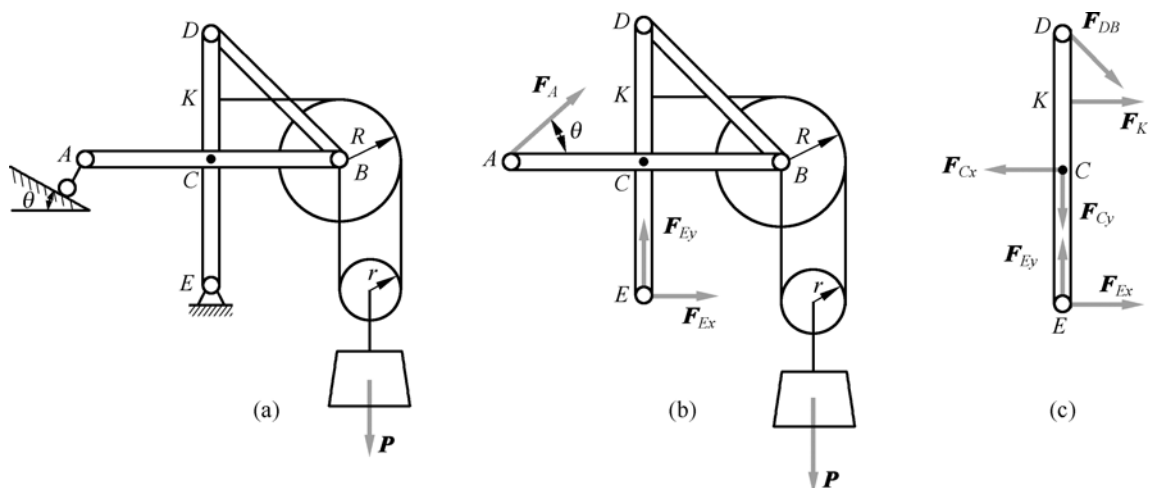
方向如图所示。

讨论：

总结例题 4-7 和例题 4-8，判断一个结构系统是静定的，还是超静定的，可以遵循下述过程：①确定系统有几个单个的构件；②确定每个构件的约束形式和约束力；③按每个构件的受力形式（二力杆、汇交力系、平行力系、一般力系）确定平衡方程的个数，注意只统计单个构件的数目，不统计整个结构和由部分单个构件组成的子系统的平衡方程数；④确定约束力的总个数，注意一对作用和反作用力只算 1 个约束力，通过平衡可明显确定为零的力应计算在内，且是未知力，如例题 4-8 中 F_{Bx} 显然为零，但算未知约束力；⑤比较未知量个数与平衡方程数，确定系统是静定的，还是超静定的。

例题 4-9

如例题图 4-9 所示的结构，已知重力 P ， $DC = CE = AC = CB = 2l$ ，定滑轮半径为 R ，动滑轮半径为 r ，且 $R = 2r = l$ ， $\theta = 45^\circ$ 。试求：支座 A , E 的约束力和杆 BD 所受的力。



例题图 4-9

分析：按照前面总结的过程不难判断，该系统是静定的。整体结构的约束力共 3 个，包括支座 A 的 1 个和支座 E 的 2 个，而单个刚体（如 DCE , ACB ）上的未知力均超过 3 个，所以应先由整体的平衡入手，然后由单个构件的平衡分析求得杆 BD 所受的力。

解：

(1) 取整体为研究对象，其受力如例题图 4-9(b)所示，列平衡方程

$$\sum M_E = 0, \quad F_A \cdot \sqrt{2} \cdot 2l + P \frac{5}{2} l = 0 \quad (a)$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_A \cos 45^\circ + F_{Ex} = 0 \quad (b)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_A \sin 45^\circ + F_{Ey} - P = 0 \quad (c)$$

由式(a)解得

$$F_A = \frac{-5\sqrt{2}}{8} P$$

代入式(b)、(c)中得

$$F_{Ex} = \frac{5P}{8}, \quad F_{Ey} = P - F_A \sin 45^\circ = \frac{13P}{8}$$

(2) 为求杆 BD 所受的力，应取包含此力的构件或子系统为研究对象。这里取杆 DCE 为研究对象，受力如例题图 4-9(c)所示，以点 C 为矩心列平衡方程

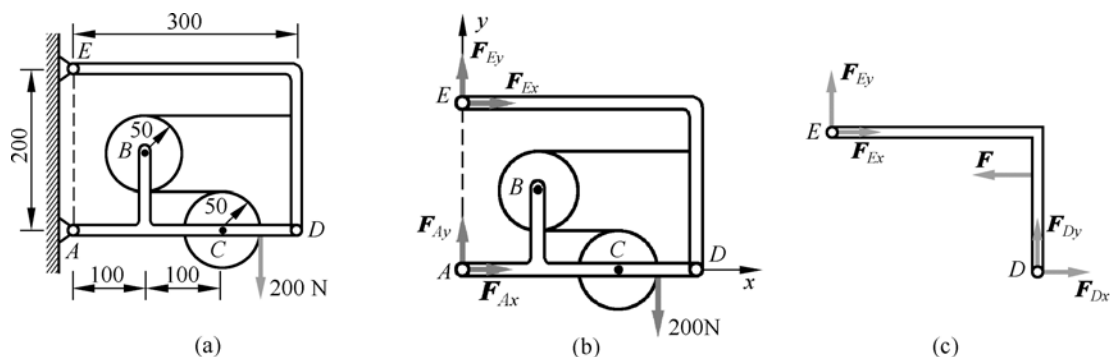
$$\sum M_C = 0, \quad F_{DB} \cdot \cos 45^\circ \cdot 2l + F_K \cdot l - F_{Ey} \cdot 2l = 0$$

其中， $F_K = \frac{P}{2}$ ，代入上式，得

$$F_{DB} = \frac{3\sqrt{2}P}{8}$$

例题 4-10

承重框架如例题图 4-10(a)所示, A, D, B 均为铰链连接, 各杆件和滑轮的重力略去不计。试求点 A, D, E 的约束力。



例题图 4-10

分析: 不难确定该系统为静定结构。但无论是整体还是单个构件 (ACD 或 DE) 都有 4 个未知约束力, 不能直接求出所有的未知量, 所以可以从任何构件的平衡分析入手。

解:

(1) 先取整体为研究对象, 受力如例题图 4-10(b)所示, 列平衡方程

$$\sum M_A = 0, \quad -200 \times 0.25 - F_{Ex} \times 0.2 = 0 \quad (a)$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + F_{Ex} = 0 \quad (b)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} + F_{Ey} - 200 = 0 \quad (c)$$

由方程(a)和(b)可依次求得: $F_{Ex} = -250 \text{ N}$ 和 $F_{Ax} = 250 \text{ N}$, 而方程(c)只能给出 F_{Ay} 和 F_{Ey} 的关系。

(2) 再取 DE 为研究对象, 受力如例题图 4-10(c)所示, 列平衡方程

$$\sum M_D = 0, \quad F \times 0.15 - F_{Ex} \times 0.2 - F_{Ey} \times 0.3 = 0 \quad (d)$$

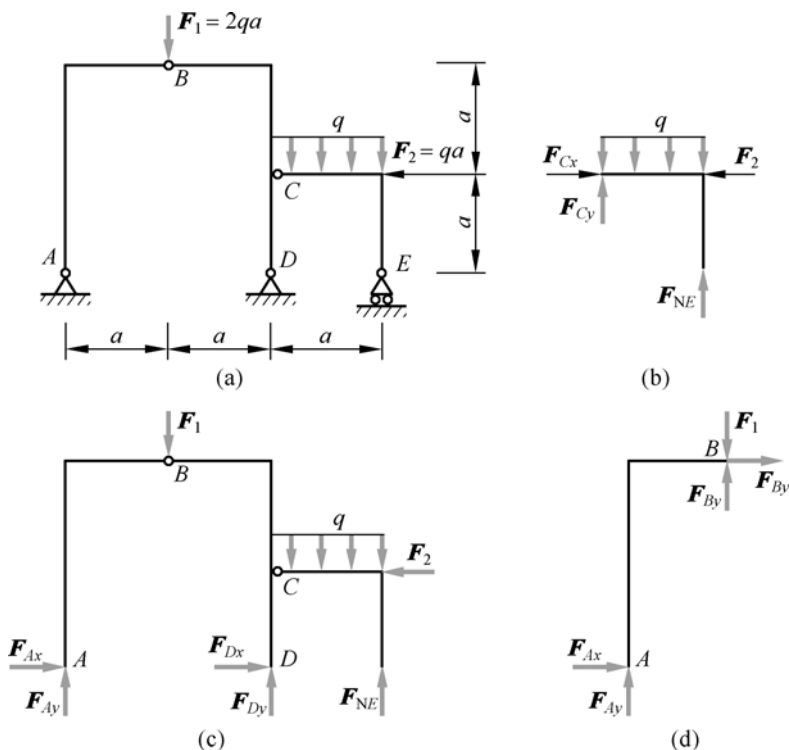
$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ex} - F + F_{Dx} = 0 \quad (e)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ey} + F_{Dy} = 0 \quad (f)$$

由方程(d)和(e)可求得 $F_{Ey} = 266.7 \text{ N}$ 和 $F_{Dx} = 450 \text{ N}$, 然后再进一步由方程(c)和(f)求得 $F_{Ay} = -66.7 \text{ N}$ 和 $F_{Dy} = -266.7 \text{ N}$ 。

例题 4-11

刚架结构由三部分组成的, 其中 A, D 为固定铰支座, E 为滚动支座, B, C 为铰链, 受力及几何尺寸如例题图 4-11(a)所示, 试求 A, D, E 处的约束力。



例题图 4-11

分析：该系统由 AB 、 DB 、 EC 三个构件组成，不难确定其为静定结构。分析整体和每个构件的受力不难发现，从构件 EC 的平衡分析入手可使求解过程简化。

解：

(1) 选取 EC 为研究对象，受力如例题图 4-11(b) 所示，包括主动力：均布荷载 q 和集中荷载 $F_2 = qa$ ；约束力：滚动支座 E 处的法向力 F_{NE} 及铰链 C 处的两个垂直分力 F_{Cx} 、 F_{Cy} 。以 C 为矩心，列平衡方程

$$\sum M_C = 0, \quad aF_{NE} - \frac{1}{2}qa^2 = 0$$

解得

$$F_{NE} = \frac{1}{2}qa$$

(2) 选取整体为研究对象，受力如例题图 4-11(c) 所示，包括主动力：均布荷载 q 和集中荷载 $F_1 = 2qa$ 、 $F_2 = qa$ ；约束力：滚动支座 E 处的法向力 F_{NE} 及固定铰支座 A 、 D 处的垂直分力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 和 F_{Dx} 、 F_{Dy} 。列平衡方程为

$$\sum M_A = 0, \quad 2aF_{Dy} + 3aF_{NE} + aF_2 - 2.5aqa - aF_1 = 0 \quad (a)$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + F_{Dx} - F_2 = 0 \quad (b)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} + F_{Dy} + F_{NE} - F_1 - qa = 0 \quad (c)$$

由方程(a)和(c)得

$$F_{Ay} = \frac{3}{2}qa, \quad F_{Dy} = qa$$

(3) 选取 AB 为研究对象, 假设集中荷载 $F_1 = 2qa$ 作用在点 B , 受力如例题图 4-11(d)所示。以 B 为矩心, 列平衡方程为

$$\sum M_B = 0, \quad aF_{Ax} - aF_{Ay} = 0$$

解得

$$F_{Ax} = F_{Ay} = \frac{3}{2}qa$$

代入方程(b)得

$$F_{Dx} = -\frac{1}{2}qa$$

4.4 平面桁架的内力计算

由直杆彼此在两端通过铰链连接而成的结构称为桁(héng)架(truss)。如图 4-12 中的桥梁、图 4-13 中支撑屋顶的网状结构都是桁架结构。桁架中杆件之间的铰链连接处称为节点(joint)。若桁架所有的杆件都在同一平面内, 则称为平面桁架, 否则称为空间桁架。本节仅涉及平面桁架。



图 4-12 桥梁中的桁架结构



图 4-13 支撑屋顶的桁架结构

由于桁架各杆件主要承受轴向拉力或压力，可以充分发挥杆件的承载能力，节约材料，减轻结构的重量，而且制造、施工又比较容易实现，所以工程上经常采用桁架结构。为了简化桁架的计算，在工程设计中常采用以下假设：

- (1) 各杆件都是直的；
- (2) 杆件用光滑的铰链连接；
- (3) 桁架所受力（包括重力、风力等外荷载）均等效地简化到相关的节点上。

这样的桁架，称为**理想桁架**。根据这些假设，理想桁架的杆件都是两端受力的二力杆件，因此各杆件所受的力必定沿着杆的方向，为轴向拉力或压力。

实际的桁架，当然与上述假设有差别，如桁架的节点可能不是理想铰链，图 4-14 中，铁路桥梁中弦杆间的连接是用铆接固定的，并不是理想铰链。但当铆接固定对弦杆旋转的约束作用可以忽略时，这种铆接固定的约束就可以简化为理想铰链。又如实际杆件的中心线也不可能是绝对直的，等等。诸如此类的因素与上述假设都存在差别。但在桁架整体的设计和分析计算中，上述假设既能简化计算，又能符合工程实际的精度要求。本书中分析的就是理想桁架，并简称桁架。



图 4-14 实际铁路桥梁中弦杆间的铆接固定

如果从桁架中任意除去一根杆件，则桁架就会变为一个机构，可以自由活动，不能承载。如在图 4-15(a)所示的桁架中，除去任意一根杆件，都不能组成一个可以承载的结构。这种桁架称为**静定桁架**。本节只研究平面桁架中的静定桁架。静定桁架又称为**无余杆桁架**。如果除去一根或几根杆件仍不会使桁架活动变形，则这种桁架称为**有余杆桁架**，是超静定结构。如图 4-15(b)所示的桁架，除去杆 1、2 后仍可承载。图 4-15(a)所示的无余杆桁架是以三角形框架为基础，每增加一个节点需要增加两根杆件，这样构成的桁架又称为**平面简单桁架**。容易证明，平面简单桁架是静定的。

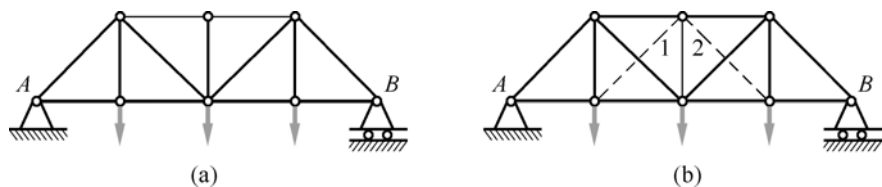


图 4-15 无余杆桁架（静定桁架）和有余杆桁架（超静定桁架）

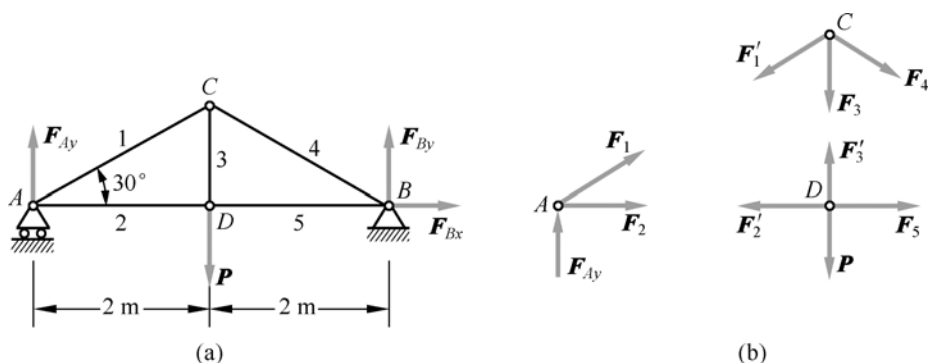
计算桁架杆件的内力常采用两种方法：节点法和截面法。以下分别进行介绍。

节点法

桁架的每个节点都受一个平面汇交力系的作用。为了求每个杆件的内力，可以逐个地取节点为研究对象，由已知力求出全部未知力，这就是节点法。

例题 4-12

平面桁架的尺寸和支座如例题图 4-12 所示，在节点 D 处受一个集中载荷 $P = 10 \text{ kN}$ 的作用。试求桁架各杆件所受的内力。



例题图 4-12

解：

(1) 以桁架整体为研究对象，求支座约束力。

桁架受 P (已知), F_{Ay} , F_{Bx} , F_{By} 4 个力的作用，列平衡方程得

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Bx} = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad F_{By} \times 4 - P \times 2 = 0$$

$$\sum M_B = 0, \quad P \times 2 - F_{Ay} \times 4 = 0$$

解得

$$F_{Bx} = 0, \quad F_{Ay} = F_{By} = 5 \text{ kN}$$

(2) 依次取一个节点为研究对象，计算各杆内力。

假定各杆均受拉力，节点 A , C , D 受力如例题图 4-12(b)所示，为了计算方便，最好逐次列出只含两个未知力的节点平衡方程。

① 节点 A ，杆的内力 F_1 和 F_2 均未知。列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_2 + F_1 \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} + F_1 \sin 30^\circ = 0$$

代入 F_{Ay} 的值，解得

$$F_1 = -10 \text{ kN}, \quad F_2 = 8.66 \text{ kN}$$

② 节点 C , 杆的内力 F_3 和 F_4 未知。列平衡方程

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0, & F_4 \cos 30^\circ - F'_1 \cos 30^\circ &= 0 \\ \sum F_y &= 0, & -F_3 - (F'_1 + F_4) \sin 30^\circ &= 0\end{aligned}$$

代入 $F'_1 = F_1$, 解得

$$F_4 = -10 \text{ kN}, \quad F_3 = 10 \text{ kN}$$

③ 节点 D , 只有一个杆的内力 F_5 未知。列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_5 - F'_2 = 0$$

代入 $F'_2 = F_2$, 解得

$$F_5 = 8.66 \text{ kN}$$

计算结果 F_2, F_5, F_3 为正, F_1 和 F_4 为负, 表明杆 2、5、3 受拉, 杆 1 和杆 4 受压。

(3) 校核计算结果。

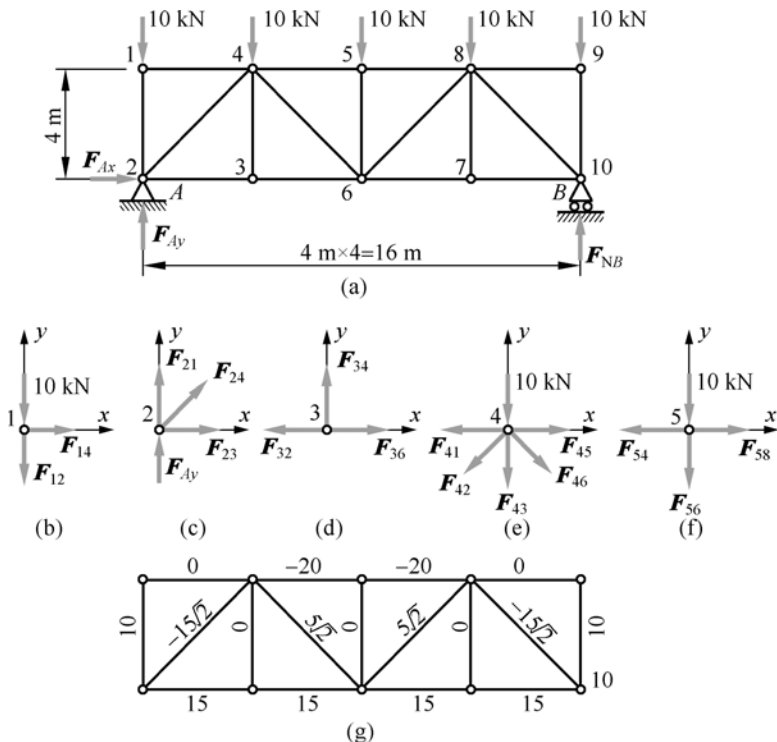
解出各杆内力之后, 可用尚未应用的节点平衡方程校核已得的结果。例如, 可对节点 D 列出另一个平衡方程为

$$\sum F_y = 0, \quad P - F'_3 = 0$$

解得 $F'_3 = 10 \text{ kN}$, 与已求得的 F_3 相等, 计算无误。也可选取点 B 校验, 请读者完成。

例题 4-13

平面桁架受力及几何尺寸如例题图 4-13(a)所示, 求各杆的内力。



例题图 4-13

解:

(1) 以桁架整体为研究对象, 求支座的约束力。

桁架整体受力如例题图 4-13(a)所示, 列平衡方程得

$$\sum M_A = 0, \quad 16F_{NB} - 1 \times 10 - 2 \times 10 - 3 \times 10 - 4 \times 10 = 0$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} + F_{NB} - 5 \times 10 = 0$$

解得

$$F_{Ay} = F_{NB} = 25 \text{ kN}$$

(2) 求平面桁架各杆的内力。假设各杆的内力为拉力。

节点 1: 受力如例题图 4-13(b)所示, 列平衡方程得

$$\sum F_x = 0, \quad F_{14} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad -F_{12} - 10 = 0$$

解得

$$F_{14} = 0, \quad F_{12} = -10 \text{ kN (压)}$$

节点 2: 受力如例题图 4-13(c)所示, 列平衡方程得

$$\sum F_x = 0, \quad F_{23} + F_{24} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{12} + F_{24} \sin 45^\circ + F_{Ay} = 0$$

将 $F_{21} = F_{12} = -10 \text{ kN}$ 代入上式, 得

$$F_{24} = -15\sqrt{2} \text{ kN (压)}, \quad F_{23} = 15 \text{ kN (拉)}$$

节点 3: 受力如例题图 4-13(d)所示, 列平衡方程得

$$\sum F_x = 0, \quad F_{36} - F_{32} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{34} = 0$$

将 $F_{32} = F_{23} = 15 \text{ kN}$ 代入上式, 得

$$F_{32} = 15 \text{ kN (拉)}, \quad F_{34} = 0$$

节点 4: 受力如例题图 4-13(e)所示, 列平衡方程得

$$\sum F_x = 0, \quad F_{45} + F_{46} \cos 45^\circ - F_{41} - F_{42} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad -F_{43} - F_{46} \sin 45^\circ - F_{42} \sin 45^\circ - 10 = 0$$

将 $F_{41} = F_{14} = 0$ 、 $F_{42} = F_{24} = -15\sqrt{2} \text{ kN}$ 、 $F_{43} = F_{34} = 0$ 代入上式, 得

$$F_{45} = -20 \text{ kN (压)}, \quad F_{46} = 5\sqrt{2} \text{ kN (拉)}$$

节点 5: 受力如例题图 4-13(f)所示, 列平衡方程得

$$\sum F_x = 0, \quad F_{58} - F_{54} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad -F_{56} - 10 = 0$$

将 $F_{54} = F_{45} = -20 \text{ kN}$ 代入上式, 得

$$F_{58} = -20 \text{ kN (压)}, \quad F_{56} = -10 \text{ kN (压)}$$

其余根据对称性可得。所有内力表示在例题图 4-13(g)中, 单位为 kN。

讨论:

例题 4-13 结果显示, 桁架中存在内力为零的杆, 通常将这些杆称为零力杆。如果能够在进行内力计算之前根据节点的特点, 准确判断零力杆, 便可以节省这部分计算工作量。某些情况下, 可根据节点平衡直接判断零力杆, 如图 4-16 所示的节点, 当无载荷作用时, 必有图 4-16(a)中的 $F_3 = 0$ 和图 4-16(b)中的 $F_1 = F_2 = 0$ 。这两种情况在桁架中很常见, 分别形象地称为“T 形节点”和“L 形节点”。

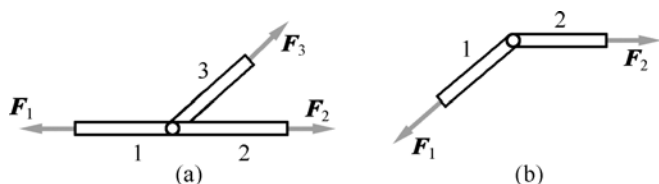


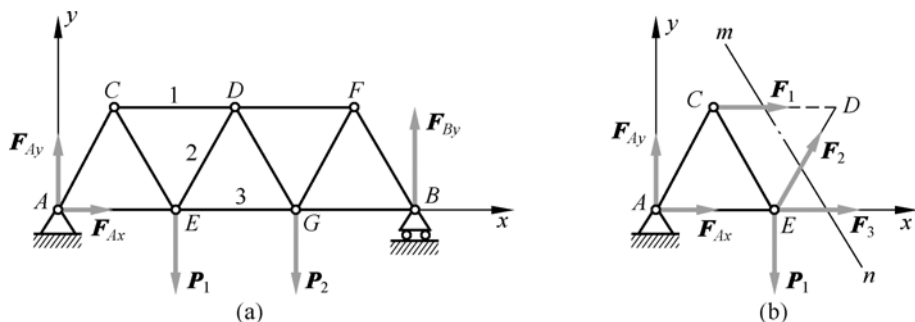
图 4-16 零力杆

截面法

如果只要求计算桁架内某几个杆件所受的内力, 可以适当地选取一个截面, 假想地把桁架截开, 再考虑其中任一部分的平衡, 求出这些被截开杆件的内力, 该方法称为截面法。此时, 被截开部分的受力一般为平面任意力系。

例题 4-14

如例题图 4-14(a)所示的平面桁架, 各杆件的长度都等于 1 m。节点 E 上作用载荷 $P_1 = 10 \text{ kN}$, 节点 G 上作用载荷 $P_2 = 7 \text{ kN}$ 。试计算杆 1、杆 2 和杆 3 的内力。



例题图 4-14

解:

(1) 以桁架整体为研究对象, 求支座的约束力。桁架受力如例题图 4-14(a)所示, 包括主动力 P_1 和 P_2 , 以及约束力 F_{Ax} , F_{Ay} 和 F_{By} 。列出平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ax} + F_{By} - P_1 - P_2 = 0$$

$$\sum M_B = 0, \quad P_1 \times 2 - P_2 \times 1 - F_{Ax} \times 3 = 0$$

解得

$$F_{Ax} = 0, \quad F_{Ay} = 9 \text{ kN}, \quad F_{By} = 8 \text{ kN}$$

(2) 求杆 1、杆 2 和杆 3 的内力。假想一个截面 $m-n$ 将三杆截断, 选取桁架左半部为研究对象。假定所截断的三杆都受拉力, 受力如例题图 4-14(b)所示, 为一个平面任意力系。列平衡方程

$$\sum M_E = 0, \quad -F_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 - F_{Ay} \times 1 = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} + F_2 \sin 60^\circ - P_1 = 0$$

$$\sum M_B = 0, \quad P_1 \times \frac{1}{2} + F_3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 - F_{Ay} \times 1.5 = 0$$

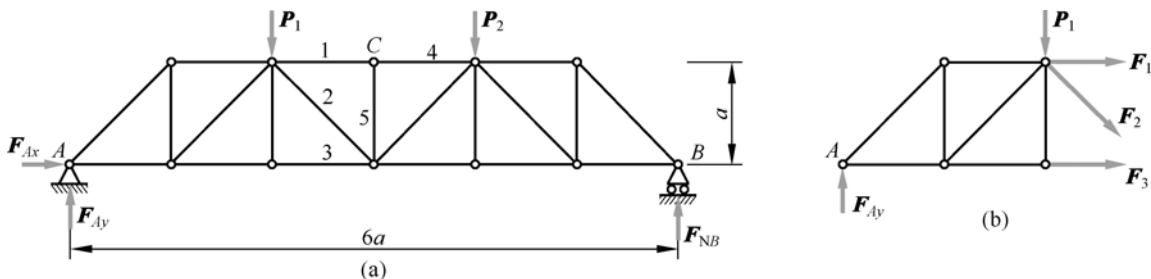
解得

$$F_1 = -10.4 \text{ kN (压力)}, \quad F_2 = 1.15 \text{ kN (拉力)}, \quad F_3 = 9.81 \text{ kN (拉力)}$$

若选取桁架的右半部为研究对象, 可得相同的结果。同样, 可以用截面截断另外三根杆件, 计算其他各杆的内力, 或用以校核已求得的结果。

例题 4-15

平面桁架受力及几何尺寸如例题图 4-15(a)所示, 试求杆 1、杆 2、杆 3 及杆 5 的内力。



例题图 4-15

解:

(1) 以桁架整体为研究对象, 求支座的约束力。桁架受力如例题图 4-15(a)所示, 列平衡方程为

解得

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0, & 6aF_{NB} - 2aP_1 - 4aP_2 &= 0 \\ \sum F_x &= 0, & F_{Ax} &= 0 \\ \sum F_y &= 0, & F_{Ay} + F_{NB} - P_1 - P_2 &= 0 \\ F_{NB} &= \frac{P_1 + 2P_2}{3}, & F_{Ay} &= \frac{2P_1 + P_2}{3}\end{aligned}$$

(2) 显然, 点 C 为 T 形节点, 所以杆 5 为零力杆。

(3) 求杆 1、杆 2 和杆 3 的内力。假想将杆 1、杆 2 和杆 3 截开, 取其中一部分, 如例题图 4-15(b)所示, 列平衡方程

$$\begin{aligned}\sum M_C &= 0, & -2aF_{Ay} + aF_3 &= 0 \\ \sum F_x &= 0, & F_1 + F_3 &= 0 \\ \sum F_y &= 0, & F_{Ay} - P_1 - F_2 \cos 45^\circ &= 0\end{aligned}$$

解得

$$F_3 = \frac{4P_1 + 2P_2}{3}, \quad F_1 = -\frac{4P_1 + 2P_2}{3}, \quad F_2 = \frac{\sqrt{2}(P_2 - P_1)}{3}$$

以上例题表明, 采用截面法, 选择适当的力矩方程, 常可较快地求得某些指定杆件的内力。当然, 应注意, 平面任意力系只有三个独立的平衡方程, 因而, 作截面时每次最多只能截断三根内力未知的杆件。当截断内力未知的杆件多于三根时, 它们的内力还需要联合由其他截面列出的方程一起求解, 有时也与节点法相结合求解问题。

本章小结

1. 平面任意力系的简化

(1) 基础: 力的平移定理——将力平行移动, 必须附加一个力偶, 该力偶的矩等于原来作用点的力对移动后作用点的矩。

(2) 结果: 平面任意力系向作用面内任意一点 O 简化, 得到一个力和一个力偶。其中, 力等于该力系的主矢, 作用线通过简化中心 O ; 力偶的矩等于该力系对点 O 的主矩。

主矢: $\mathbf{F}'_R = \sum \mathbf{F}_i = i \sum F_{ix} + j \sum F_{iy}$; 主矩: $M_O = \sum M_O(\mathbf{F}_i) = \sum (x_i F_{iy} - y_i F_{ix})$

(3) 四种情况

主矢	主矩	合成结果	
$\mathbf{F}'_R \neq 0$	$M_O = 0$	一个合力	合力作用线通过选定的简化中心 O
	$M_O \neq 0$	一个合力 (进一步简化)	合力作用线到点 O 的距离为 $d = \frac{M_O}{F'_R}$
$\mathbf{F}'_R = 0$	$M_O \neq 0$	一个力偶	力偶对于平面内任意一点的矩都相同, 与简化中心的选择无关
	$M_O = 0$	平衡	给出平面任意力系平衡的充要条件

2. 平面任意力系的平衡分析

力系	平衡方程	独立方程数
平面力偶系	$\sum M$	1
共线力系	$\sum F_x = 0$	1
平面汇交力系	$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$	2
平面平行力系	$\sum F_x = 0, \sum M_O = 0$	2
平面任意力系	以下三种形式	3

- (1) 基本形式: $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_O(F_i) = 0$
- (2) 二矩式: $\sum F_x = 0, \sum M_A(F_i) = 0, \sum M_B(F_i) = 0$ (x 轴不得垂直于 A, B 两点的连线)
- (3) 三矩式: $\sum M_A(F_i) = 0, \sum M_B(F_i) = 0, \sum M_C(F_i) = 0$ (A, B, C 三点不得共线)

3. 静定和超静定结构

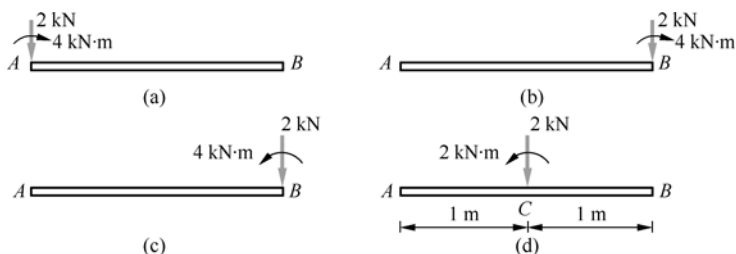
- (1) 静定: 未知量数目 = 平衡方程数目
- (2) 超静定: 未知量数目 > 平衡方程数目

4. 桁架内力计算

- (1) 节点法
- (2) 截面法

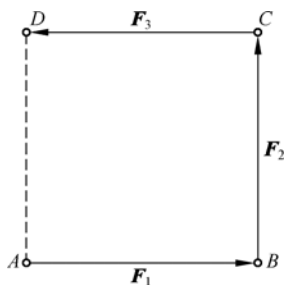
思考题

- 4-1 关于力系简化下列说法是否正确? 错误的请指出原因。
(1) 平面一般力系向某点简化为合力偶时, 若向另一点简化, 则其结果相同。
(2) 平面上一个力和一个力偶可以简化成一个力。
(3) 某一平面力系, 若其力多边形不封闭, 则该力系一定有合力, 合力作用线与简化中心的位置无关。
(4) 平面力系向某点简化的主矢为零, 主矩不为零, 则此力系可合成为一个合力偶, 且此力系向任意一点简化的主矩与简化中心的位置无关。
(5) 当平面力系的主矢为零时, 其主矩一定与简化中心的位置无关。
- (6) 当平面一般力系对某点的主矩为零时, 该力系向任意一点简化的结果必为一个合力。
- 4-2 关于力系平衡下列说法是否正确? 错误的请指出原因。
(1) 在平面任意力系中, 若其力多边形自行闭合, 则力系平衡。
(2) 如果某平面力系由多个力偶和一个力组成, 则该力系一定不是平衡力系。
(3) 已知一个刚体在 5 个力作用下处于平衡, 若其中 4 个力的作用线汇交于点 O , 则第 5 个力的作用线必过点 O 。
- 4-3 试讨论思考题图 4-3 所示力系中哪些是等效的。



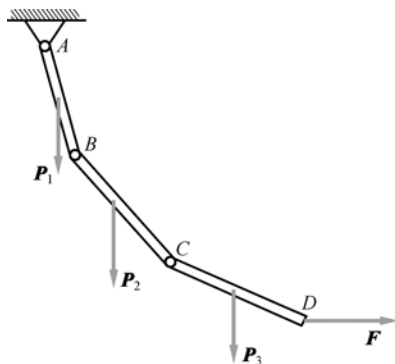
思考题图 4-3

4-4 如思考题图 4-4 所示的正方形 $ABCD$, 边长为 a (cm), 在刚体 A, B, C 三点上分别作用了三个力, 且 $F_1 = F_2 = F_3 = F$, 则该力系简化的最后结果是什么?



思考题图 4-4

4-7 分析如思考题图 4-7 所示体系当有无数根无限短杆组成时的平衡条件。

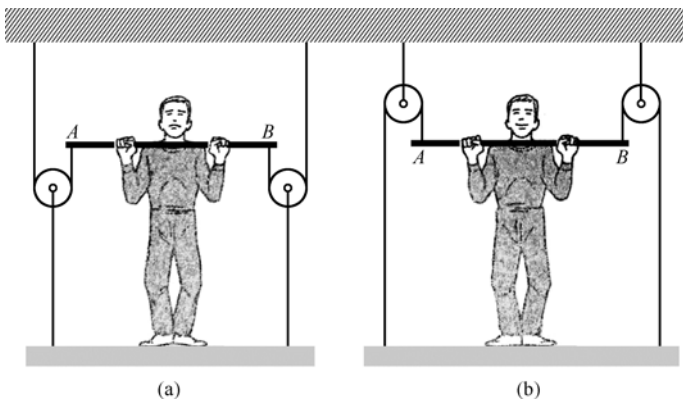


思考题图 4-7

4-5 平面一般力系的平衡条件为什么可以用 3 矩式表征? 矩心选取需要满足什么条件。

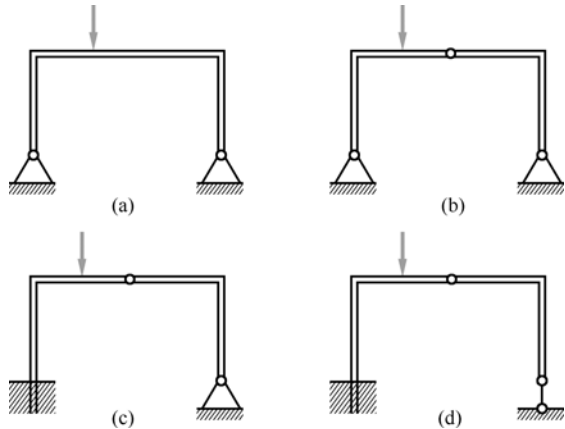
4-6 为什么平面一般力系只有 3 个独立的平衡方程? 你能证明第 4 个方程一定与这 3 个方程线性相关吗?

4-8 分析如思考题图 4-8(a)、(b)所示系统的受力, 能得出什么结论?



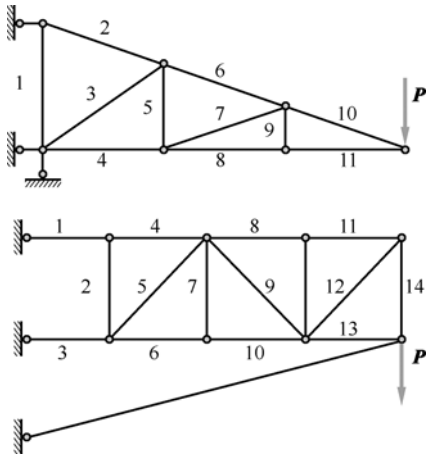
思考题图 4-8

4-9 分析判断如思考题图 4-9 所示的情况哪些是静定问题，哪些是超静定问题。



思考题图 4-9

4-10 分析判断如思考题图 4-10 所示桁架结构中哪些是零杆。

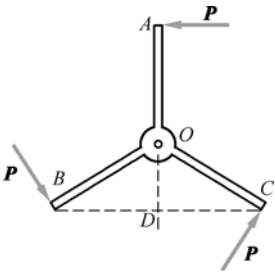


思考题图 4-10

习 题

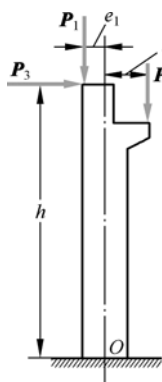
基本题

- 4-1 习题图 4-1 所示铰盘有三个等长的柄，长度为 l ，之间的夹角均为 120° ，每个柄端各作用一个垂直于柄的力 P 。试求该力系：(1) 向中心点 O 简化的结果；(2) 向 BC 连线的中点 D 简化的结果。这两个结果说明什么问题？
- 4-2 如习题图 4-2 所示，柱子上有作用力 P_1, P_2 和 P_3 ，为了对基础进行强度校核，试把这些力向基础中心点 O 简化。

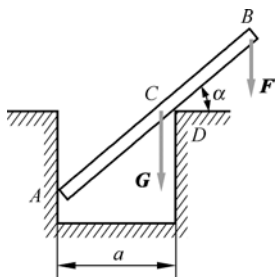


习题图 4-1

- 4-3 均质杆 AB 重 G ，长 l ，放在宽度为 a 的光滑槽内，杆的 B 端作用着铅垂向下的力 F ，如习题图 4-3 所示。试求杆平衡时对水平面的倾角 α 。

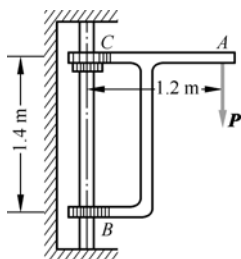


习题图 4-2



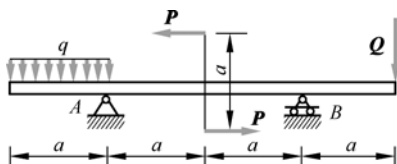
习题图 4-3

4-4 起重机的构架 ABC 可沿垂轴 BC 滑动，但在轴上 C 处有一个固定凸缘借以支持构架。设荷载 $P = 10 \text{ kN}$ ，求 B, C 处的约束力。忽略构架的重量和摩擦。



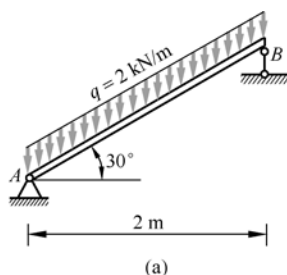
习题图 4-4

4-5 如习题图 4-5 所示的外伸梁，已知 $P = 10 \text{ kN}$ ， $Q = 20 \text{ kN}$ ， $q = 20 \text{ kN/m}$ ， $a = 0.8 \text{ m}$ 。求支座的约束力。

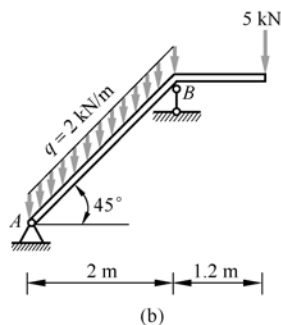


习题图 4-5

4-6 求习题图 4-6 所示梁 A, B 处的约束力。



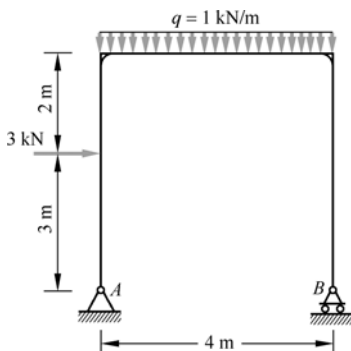
(a)



(b)

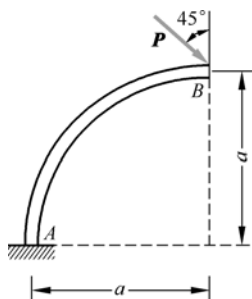
习题图 4-6

4-7 钢架的受力及支座情况如习题图 4-7 所示，其自重不计。求支座的约束力。



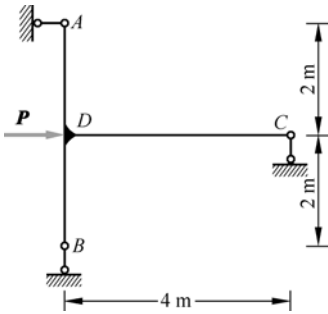
习题图 4-7

4-8 习题图 4-8 所示的是一根曲杆，已知力 P 和尺寸 a ，求固定端支座 A 的约束力。



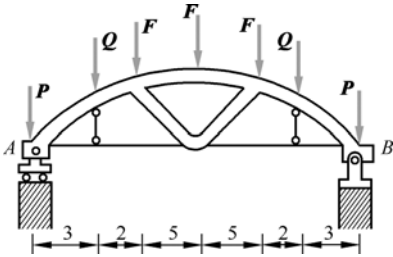
习题图 4-8

4-9 图示结构在点 D 作用一个水平力 $P = 2 \text{ kN}$ 。
求 A, B 和 C 处的约束力。



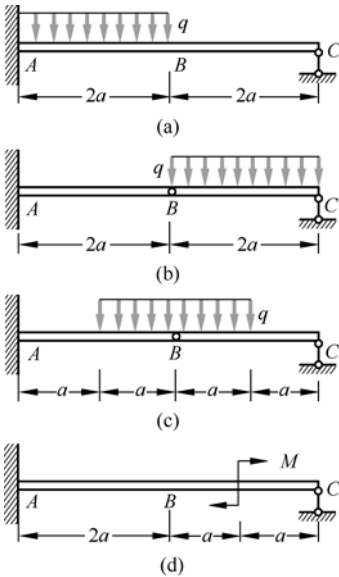
习题图 4-9

4-10 习题图 4-10 所示的拱形屋架所受各力为 $F = 10 \text{ kN}$, $Q = 8 \text{ kN}$, $P = 5 \text{ kN}$, 屋架自重不计。求支座的约束力 (图中尺寸以 m 为单位)。

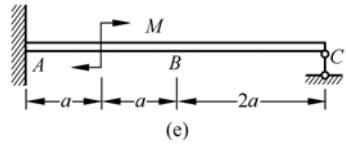


习题图 4-10

4-11 试求习题图 4-11 所示各梁在 A, B 和 C 处的约束力, q 为均布荷载的集度, M 为力偶矩。

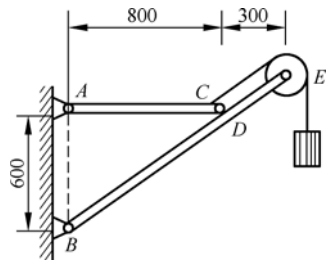


习题图 4-11



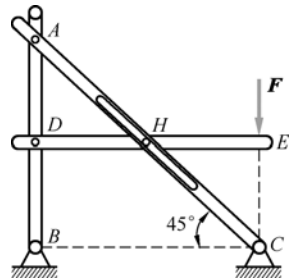
习题图 4-11

4-12 起重构架如习题图 4-12 所示, 滑轮直径 $d = 200 \text{ mm}$, 钢丝绳的倾斜部分平行于杆 BE 。吊起的载荷重 10 kN , 其他重量不计。试求固定铰链支座 A 和 B 的约束力。



习题图 4-12

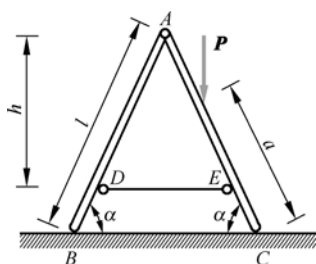
4-13 AB, AC 和 DE 三杆连接如习题图 4-13 所示。杆 DE 上有一个插销 H 套在杆 AC 的导槽内。试求在水平杆 DE 的一端有一个铅垂力 F 作用时, 杆 AB 所受的力。设 $AD = DB$, $DH = HE$, $BC = DE$, 杆重不计。



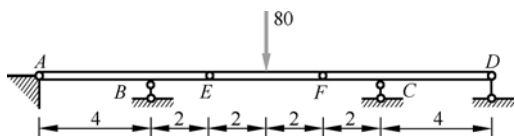
习题图 4-13

4-14 梯子的两部分 AB 和 CD 在点 A 铰接, 又在 D, E 两点用水平绳子连接。梯子放在光滑的水平面上, 其一边作用有铅垂力 P , 尺寸如习题图 4-14 所示, 不计梯重。求梯子平衡时绳 DE 中的拉力。

4-15 多跨梁如习题图 4-15 所示, 求支座 A 及链杆 B, C, D 的约束力。图中力的单位为 kN , 长度的单位为 m 。

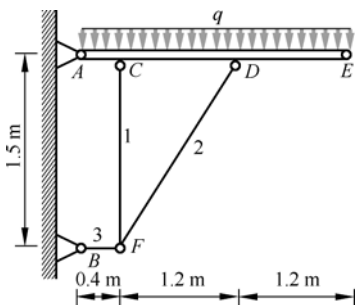


习题图 4-14



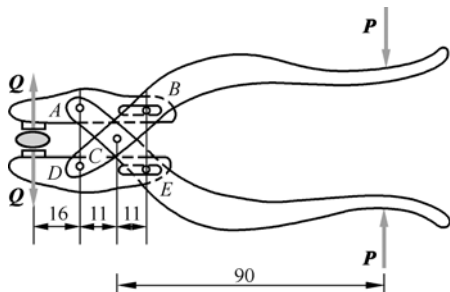
习题图 4-15

- 4-16 梁 AE 通过支座 A 与墙连接，在 C 和 D 处受到杆 1, 2 的支承。已知均布荷载 $q = 10 \text{ kN/m}$ ，结构尺寸如习题图 4-16 所示，不计杆重。求支座 A 的约束力及杆 1, 2, 3 所受的力。



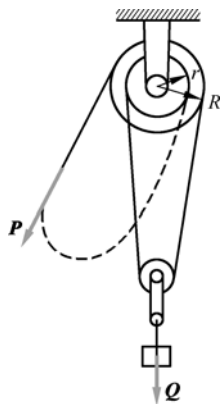
习题图 4-16

- 4-17 习题图 4-17 所示的是一个夹子夹持一个物件，已知其压力为 Q ，销钉 E 和 B 分别固定在手柄 ACE 与 DCB 上，并可以在光滑的槽内移动， A, D, C 处均为铰链。试问手柄上所加的力 P 为多大？图中力的单位为 N ，长度的单位为 cm 。



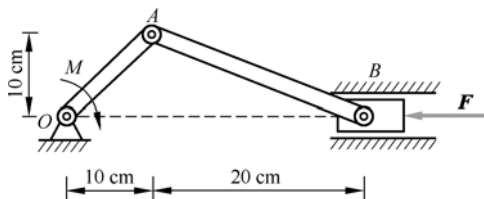
习题图 4-17

- 4-18 习题图 4-18 所示的差动滑车中，半径为 r 和 R 的两个轮子固结在一起，重物的重量为 Q ，试求所需的拉力 P 。



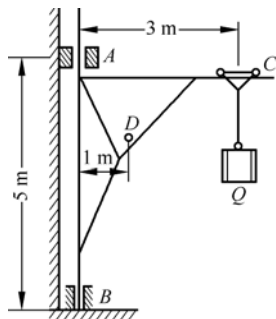
习题图 4-18

- 4-19 曲柄连杆活塞机构在习题图 4-19 所示位置时活塞上受力 $F = 400 \text{ N}$ 。若不计所有构件的重量和摩擦，问在曲柄上应加多大的力矩才能使机构平衡。



习题图 4-19

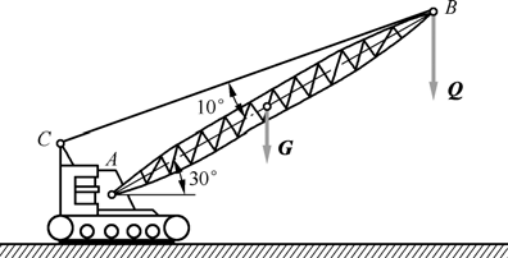
- 4-20 习题图 4-20 所示的铸造用起重机 ABC 具有铅垂转动轴 AB ，起重机质量为 0.35 t ，重心在 D 处， C 处吊有重物 Q ，质量为 1 t ，试求轴承 A 与止推轴承 B 的约束力。



习题图 4-20

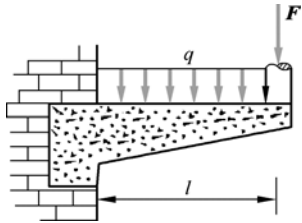
- 4-21 起重臂 AB 长 12 m ，质量为 1 t ，重心 G 至铰链 A 的距离为 6 m 。求在习题图 4-21

所示位置时绳 BC 的拉力和铰链 A 处的约束力。设 B 处所吊重物 Q 质量为 2.5 t 。



习题图 4-21

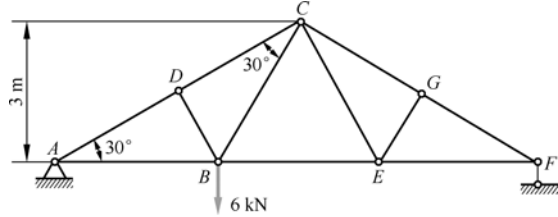
4-22 如习题图 4-22 所示，阳台一端砌入墙内，其重量可看成是均布荷载，集度为 q ；另一端作用有来自柱子的力 F ，柱子到墙边的距离为 l 。试求阳台固定端的约束力。



习题图 4-22

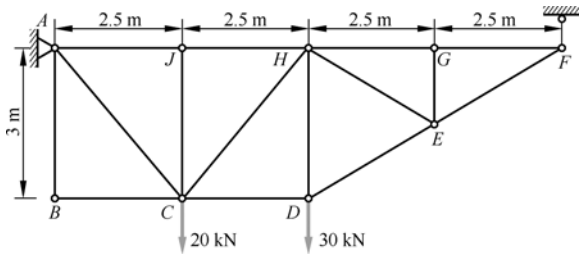
4-23 AB, AC, AD 和 BC 四杆连接如习题图 4-23 所示。在水平杆 AB 上作用有铅垂向下的力 F 。接触面和各铰链均为光滑的，

4-25 试用节点法计算习题图 4-25 所示桁架各杆件的内力。



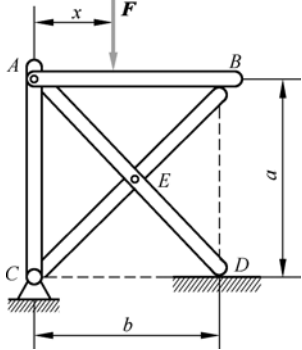
习题图 4-25

4-26 试用节点法计算习题图 4-26 所示桁架各杆件的内力。



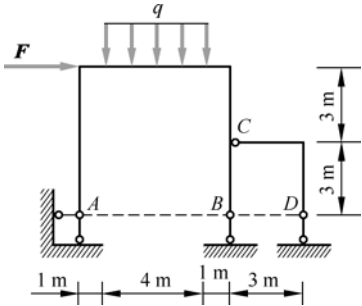
习题图 4-26

杆重不计，试求证无论力 F 的位置如何，杆 AC 总受到大小等于 F 的压力。



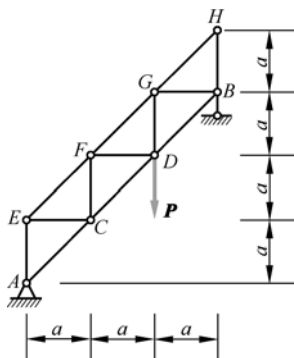
习题图 4-23

4-24 如习题图 4-24 所示，刚架 ACB 和刚架 CD 通过铰链 C 连接，并与地面通过铰链 A, B 和 D 连接。已知 $F = 100\text{ kN}$ ， $q = 10\text{ kN/m}$ 。试求刚架的支座约束力。



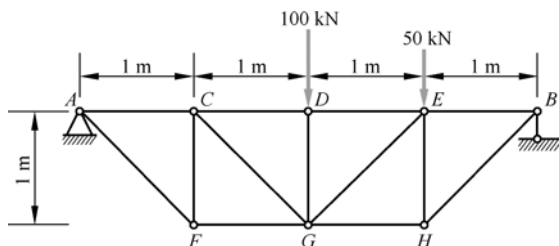
习题图 4-24

- 4-27 试用截面法计算习题图 4-27 所示桁架杆件 GH , DF , CF 及 CD 的内力。



习题图 4-27

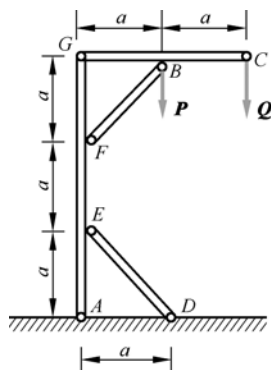
- 4-28 试用截面法计算习题图 4-28 所示桁架杆件 DE , EG 及 EH 的内力。



习题图 4-28

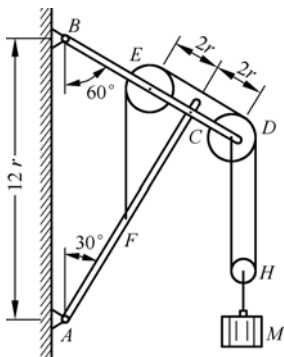
提高题

- 4-29 如习题图 4-29 所示的构架, 不计自重, A, B, D, E, F 和 G 都是铰链。设 $P=5 \text{ kN}$, $Q=3 \text{ kN}$, $a=2 \text{ m}$ 。试求铰链 G 和杆 ED 所受的力。



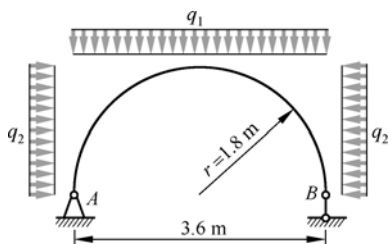
习题图 4-29

- 4-30 杆系的支座和荷载如习题图 4-30 所示。已知滑轮 D 和 E 的半径均为 r , 滑轮 H 的直径为 r , 其余尺寸如图所示, 物体 M 重 P 。若不计杆和滑轮的重力, 求 A 和 B 处的约束力。



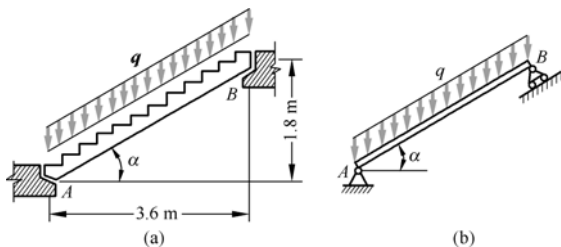
习题图 4-30

- 4-31 习题图 4-31 所示的是曲梁的计算简图, 竖向作用的均布荷载 $q_1=200 \text{ kN/m}$, 水平作用的均布荷载 $q_2=120 \text{ kN/m}$ 。求曲梁支座的约束力。



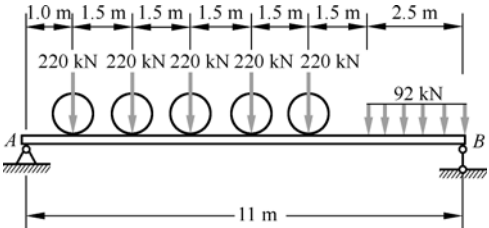
习题图 4-31

- 4-32 如习题图 4-32 所示, 楼梯的两端支在两个楼梯梁上 [图(a)], 上端 B 可视为光滑接触, 下端 A 可视为铰链 [图(b)], 所受荷载连同楼梯自重可视为沿楼梯长度均匀分布, 设荷载的集度 $q=0.7 \text{ kN/m}$, 试求楼梯两端 A, B 的约束力。



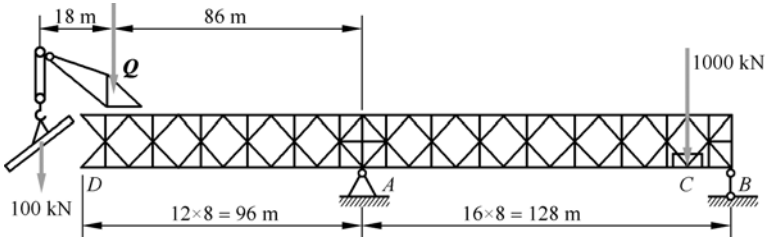
习题图 4-32

4-33 一根跨度为 11 m 的钢梁，作用着铁路标准活荷载，如习题图 4-33 所示。求在此活荷载作用下支座 A, B 处的约束力。



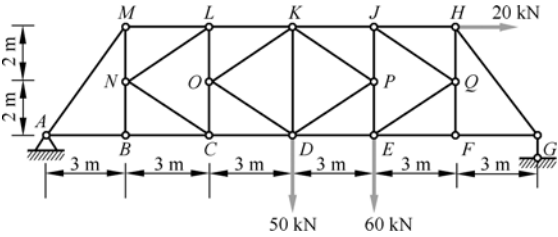
习题图 4-33

4-34 刚梁架设过程的某阶段如习题图 4-34 所示。伸臂梁 (DA 段) 重量可按 160 kN/m



习题图 4-34

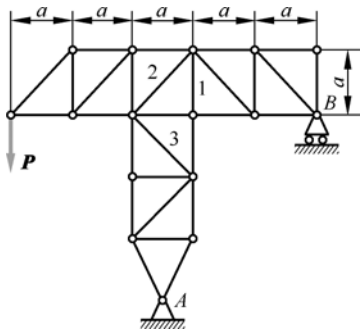
4-35 试用截面法计算图示桁架杆件 KL, LO 和 LN 的内力。



习题图 4-35

计，锚段 (AB 段) 重量可按 180 kN/m， C 处压重按 1000 kN 计；架梁吊机自重 $Q = 300$ kN，其重心到点 A 的水平距离为 86 m；正在起吊的杆件重量为 100 kN，其重心到吊机重心距离为 18 m。求支座 A, B 处的约束力。图中位于点 A 左边各力对点 A 的矩是倾覆力矩，位于点 A 右边各力（支座约束力除外）对点 A 的矩是稳定力矩。稳定力矩与倾覆力矩之比称为稳定系数。求在图示阶段的稳定系数。

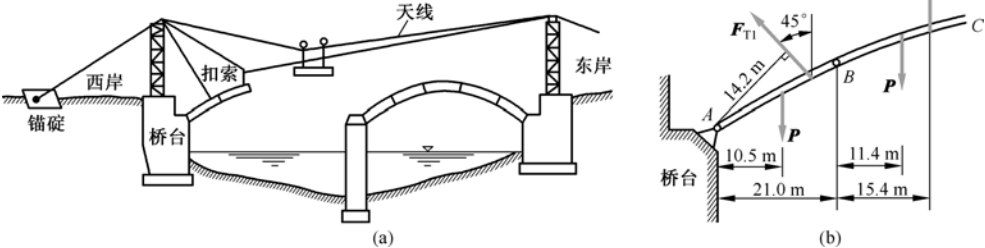
4-36 试用简捷的方法计算习题图 4-36 中所示桁架杆件 1, 2, 3 的内力。



习题图 4-36

研究性题

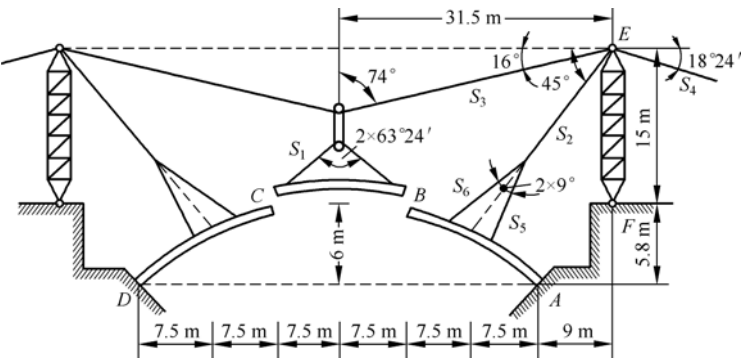
4-37 如习题图 4-37(a)所示，某大桥采用无支架天线吊装法施工，拱肋分五段吊装。靠西岸一孔的一、二段拱肋已吊至安装位置，用扣索临时固定。已知每段拱肋质量为 30 t，扣索位置如习题图 4-37(b)所示。试求两根扣索的拉力及桥台给拱肋的作用力（两拱之间可看成铰接）。



习题图 4-37

4-38 某桥梁工地进行双曲拱桥无支架施工，塔架起吊设备及尺寸布置如习题图 4-38 所示，起重索、牵引索和绞盘等从略。拱肋分三段架设， AB 段和 CD 段质量各为 10.3 t ，已先架好，最后架设 BC 段，质量为 8 t ，拱肋重心近似地认为均在各段水平距离的

中点，起吊所用的滑轮组质量为 614 kg ，绳索质量不计。试求：(1) 各段绳索的拉力 $S_1\sim S_6$ ；(2) 点 A 的约束力（点 A 视为铰接）；(3) 塔架 EF 所受的力（塔架自重略去不计）。



习题图 4-38

第 5 章

空间力系

力的作用线不在同一平面的力系称为空间力系，这是最一般的力系。若力的作用线交于一点，则称为空间汇交力系；由空间力偶组成的力系，称为空间力偶系；力作用线互相平行的力系，称为空间平行力系；其他情况为空间一般（任意）力系。本章与平面力系类似，讨论空间力系的简化和平衡分析。

5.1 空间汇交力系

空间汇交力系的合成

与平面汇交力系类似，根据合力投影定理，得空间汇交力系的合力 \mathbf{F}_R 在直角坐标轴 x, y, z 上的投影为

$$\begin{cases} F_{Rx} = F_{x1} + F_{x2} + \cdots + F_{xn} = \sum F_{xi} \\ F_{Ry} = F_{y1} + F_{y2} + \cdots + F_{yn} = \sum F_{yi} \\ F_{Rz} = F_{z1} + F_{z2} + \cdots + F_{zn} = \sum F_{zi} \end{cases} \quad (5-1)$$

于是，合力 \mathbf{F}_R 在空间直角坐标系中的解析式可写为

$$\mathbf{F}_R = F_{Rx}\mathbf{i} + F_{Ry}\mathbf{j} + F_{Rz}\mathbf{k} = \mathbf{i} \sum F_{xi} + \mathbf{j} \sum F_{yi} + \mathbf{k} \sum F_{zi} \quad (5-2)$$

且合力的作用线通过汇交点。合力的大小和方向由下式计算得到

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{\left(\sum F_{xi}\right)^2 + \left(\sum F_{yi}\right)^2 + \left(\sum F_{zi}\right)^2} \quad (5-3)$$

$$\cos(\mathbf{F}_R, \mathbf{i}) = \frac{F_{Rx}}{F_R} = \frac{\sum F_{xi}}{\sum F_{xi}}, \quad \cos(\mathbf{F}_R, \mathbf{j}) = \frac{F_{Ry}}{F_R} = \frac{\sum F_{yi}}{\sum F_{yi}}, \quad \cos(\mathbf{F}_R, \mathbf{k}) = \frac{F_{Rz}}{F_R} = \frac{\sum F_{zi}}{\sum F_{zi}} \quad (5-4)$$

空间汇交力系的平衡

空间汇交力系平衡的充分必要条件是此力系的合力为零。由式(5-2)或式(5-3)得

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{\left(\sum F_{xi}\right)^2 + \left(\sum F_{yi}\right)^2 + \left(\sum F_{zi}\right)^2} = 0$$

空间汇交力系平衡的方程为

$$\sum F_{xi} = 0, \sum F_{yi} = 0, \sum F_{zi} = 0 \quad (5-5)$$

这就是空间汇交力系平衡的解析条件，即力系中各力在坐标轴上投影的代数和均为零。上述 3 个方程式相互独立，可求解 3 个未知力。

例题 5-1

如例题图 5-1 所示，沿正方体三个侧面的对角线有三个杆铰接于点 A ，并在点 A 作用有沿竖直方向的力 F ，不计杆自重，试求三个杆的内力。

解：

受力如例题图 5-1 所示，假设三个杆受拉力，在点 A 与已知力 F 构成空间汇交力系。列平衡方程

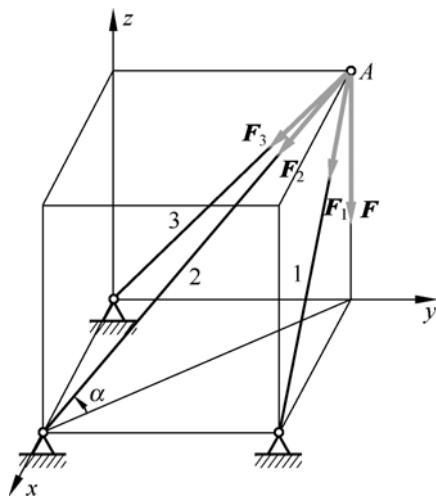
$$\sum F_{xi} = 0, \quad F_1 \cos 45^\circ + F_2 \cos \alpha \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_{yi} = 0, \quad -F_2 \cos \alpha \cos 45^\circ - F_3 \cos \alpha \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_{zi} = 0, \quad -F_1 \cos 45^\circ - F_3 \cos 45^\circ - F_2 \sin \alpha - F = 0$$

其中， $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ， $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 。由上面三式联立求解得

$$F_1 = F_3 = -\sqrt{2}F \quad (\text{压力}), \quad F_2 = \sqrt{3}F \quad (\text{拉力})$$



例题图 5-1

5.2 空间力偶系

力偶与力在物体受力分析中有着同等重要的地位，它们是分析物体受力及运动的两个基本要素。本节将系统地介绍空间力偶的概念及其数学描述。前面的平面力偶可看成这里的一种特殊情况。

5.2.1 空间力对点的矩和对轴的矩

空间力对点的矩

我们已经知道力使物体绕轴转动的效应是由力矩来度量的。在工程中还存在物体绕一点转动的现象，如汽车的挡位操纵杆，如图 5-1 所示。研究力对点的矩是研究空间力系简化的基础，因此需要在更一般的意义上讨论相关的概念和计算。

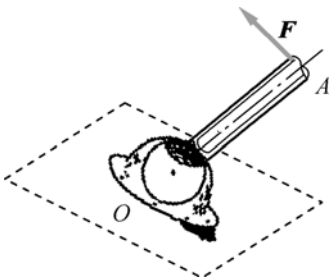


图 5-1 汽车的挡位操纵杆——力对点的矩

对于平面力系，用代数量表示力对点的矩足以概括它的全部要素。但是对于空间力系，不仅要考虑力矩的大小、转向，还要考虑力与矩心所组成的平面的方位。方位不同，即使力矩大小一样，作用效果也完全不同。例如，作用在飞机尾部铅垂舵和水平舵上的力，对飞机绕重心转动的效果不同，前者使飞机转弯，而后者则使飞机发生俯仰。因此，在研究空间力系对刚体的转动效应时，除了要考虑力矩的大小和转向外，还应考虑力的作用线与矩心所组成平面的方位（可由平面的法向确定）。与力类似，力矩的三个要素可以用一个矢量来表示（称为**矩矢**）：该矢量的模等于力的大小与矩心到力作用线的垂直距离 h （力臂）的乘积；矢量的方位与力和矩心组成的平面的法线相同；该矢量的指向也可由右手螺旋法则确定，如图 5-2 所示。

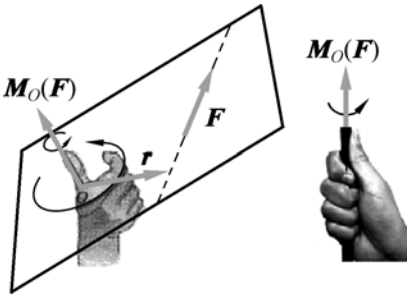


图 5-2 右手螺旋法则

记力 F 对点 O 的矩为 $M_O(F)$ ，则力矩的大小为

$$|M_O(F)| = Fh = 2\triangle OAB$$

式中， $\triangle OAB$ 为三角形 OAB 的面积，如图 5-3 所示。

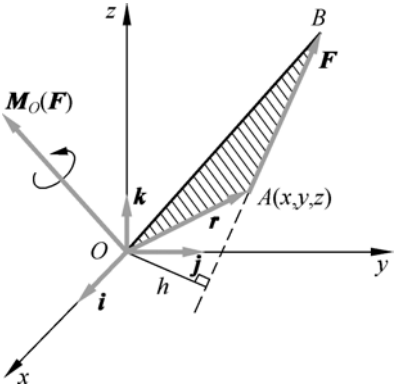


图 5-3 力对点的矩的计算

由图 5-3 易见, 若以 \mathbf{r} 表示力作用点 A 的矢径, 则矢积 $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 的模等于三角形 OAB 面积的两倍, 其方向与矩矢 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$ 一致。因此可得

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (5-6)$$

上式为力对点的矩的矢积表达式, 即力对点的矩矢等于矩心到力作用点的矢径与力的矢量积。

若以矩心 O 为原点, 建立空间直角坐标系 $Oxyz$, 设 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别为坐标轴 x, y, z 的单位矢量, 力作用点 A 的坐标为 $A(x, y, z)$, 力在三个坐标轴上的投影分别为 F_x, F_y, F_z , 则矢径 \mathbf{r} 和力 \mathbf{F} 分别为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

代入式(5-6), 得

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = M_{Ox}\mathbf{i} + M_{Oy}\mathbf{j} + M_{Oz}\mathbf{k} \quad (5-7)$$

式中, M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} 分别为 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$ 在 x, y, z 轴上的投影, 且

$$M_{Ox} = yF_z - zF_y, \quad M_{Oy} = zF_x - xF_z, \quad M_{Oz} = xF_y - yF_x \quad (5-8)$$

显然, 矩矢 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$ 的大小和方向都与矩心 O 的位置有关, 所以矩矢的始端一定在矩心, 这种矢量称为定位矢量。

式(5-7)和式(5-8)提供了计算力对点的矩的一种方法, 若已知 M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} , 则矩矢 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$ 的大小和方向分别为

$$M_O(\mathbf{F}) = \sqrt{M_{Ox}^2(\mathbf{F}) + M_{Oy}^2(\mathbf{F}) + M_{Oz}^2(\mathbf{F})} \quad (5-9)$$

$$\cos(\mathbf{F}, \mathbf{i}) = \frac{M_{Ox}(\mathbf{F})}{M_O(\mathbf{F})}, \quad \cos(\mathbf{F}, \mathbf{j}) = \frac{M_{Oy}(\mathbf{F})}{M_O(\mathbf{F})}, \quad \cos(\mathbf{F}, \mathbf{k}) = \frac{M_{Oz}(\mathbf{F})}{M_O(\mathbf{F})} \quad (5-10)$$

空间力对轴的矩

工程中常遇到刚体绕定轴转动的情况, 为了度量空间力对绕定轴转动刚体的作用效果, 定义力对轴的矩。如图 5-4 所示, 任意力 \mathbf{F} 对固定轴 z 的矩记为 $M_z(\mathbf{F})$ 。将力分解为与 z 轴平行和垂直的两个分力 \mathbf{F}_z 和 \mathbf{F}_{xy} , 显然, 平行于 z 轴的分力 \mathbf{F}_z 不能影响物体绕 z 轴的转动, 只有垂直于 z 轴的分力 \mathbf{F}_{xy} 对 z 轴有矩, 于是

$$M_z(\mathbf{F}) = M_z(\mathbf{F}_{xy}) = M_O(\mathbf{F}_{xy}) = \pm F_{xy}h \quad (5-11)$$

或用解析式表示为

$$M_z(\mathbf{F}) = xF_y - yF_x \quad (5-12)$$

式(5-11)中, O 为 z 轴上的一点, 它与 \mathbf{F}_{xy} 的作用线组成的平面与 z 轴垂直, 如图 5-4 所示。

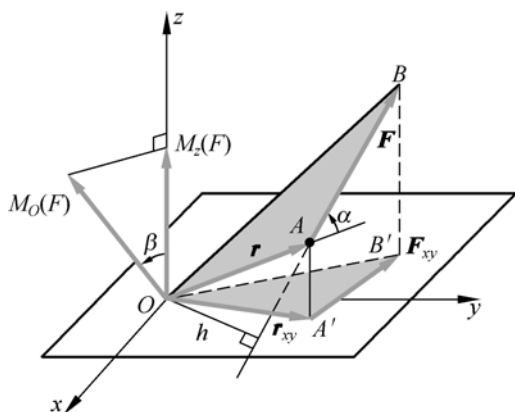


图 5-4 力对点的矩与力对轴的矩

显然，式(5-11)回到了平面问题中力对点的矩的计算：力对轴 z 的矩等于该力在垂直于 z 平面上的分力对点 O 的力矩。力对轴的矩是代数量，其正负号可以按右手螺旋法则确定：四个手指顺着力的方向去握 z 轴，如果大拇指的方向与轴的正向一致，则力矩为正，否则为负。或者从 z 轴正端看，力使物体绕 z 轴逆时针转动时矩为正，顺时针转动时则为负。当力与轴共面时，力对轴的矩为零。

比较式(5-8)和式(5-12)，力对点的矩与力对轴的矩存在如下关系：

$$M_z(\mathbf{F}) = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = M_{O_z}(\mathbf{F}) \quad (5-13)$$

式中点 O 在 z 轴上。力对 x, y 轴的矩也具有同样的性质，即力对点的矩在过该点的轴上的投影等于同一力对该轴的矩。借助式(5-11)，可将计算力对点的矩转化为计算力对轴的矩。若已知力对坐标轴 x, y, z 的矩，则可通过式(5-9)和式(5-10)求得对坐标原点 O 的矩的大小和方向余弦。

从空间的角度看，平面问题中力对点的矩其实就是力对轴的矩，只是此时力和轴处于交叉垂直状态而已。

合力矩定理

与平面力系的情况一样，对空间力系成立如下合力矩定理：空间汇交力系的合力对任意一点的矩等于各分力对该点的矩的矢量和。如图 5-5 所示， \mathbf{F}_R 是空间汇交力系 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ 的合力，所以

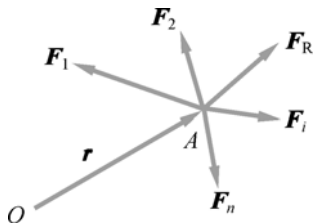


图 5-5 合力矩定理

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}_R = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n)$$

由矢量叉乘的运算法则，得

$$\begin{aligned} M_O(\mathbf{F}_R) &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_R = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n) \\ &= \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_1) + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_2) + \cdots + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_n) = \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) \end{aligned} \quad (5-14)$$

关于空间汇交力系对轴的矩也存在同样的合力矩定理。

例题 5-2

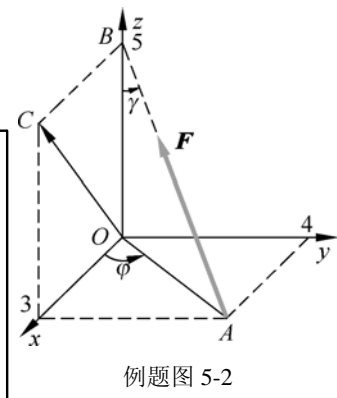
如例题图 5-2 所示, 力 \mathbf{F} 通过点 $A(3, 4, 0)$ 和点 $B(0, 0, 5)$, 设 $F=100 \text{ N}$, 图中尺寸单位为 m 。求: (1) 力 \mathbf{F} 对坐标轴 x, y, z 的矩; (2) 力 \mathbf{F} 对轴 OC 的矩, 其中点 C 的坐标为 $(3, 0, 5)$ 。

分析: 力 \mathbf{F} 对坐标轴的矩可以直接利用式(5-8)计算, 也可以先计算力对坐标原点 O 的矩, 然后再向坐标轴上投影。求力对任意轴的矩则要利用后一种方法。

解:

(1) 求力对坐标轴的矩

方法 1: 利用式(5-8)计算。先计算力 \mathbf{F} 在坐标轴上的投影, 根据图示, 有



例题图 5-2

$$OA = OB, \quad \gamma = 45^\circ, \quad \cos \varphi = 0.6, \quad \sin \varphi = 0.8$$

$$F_x = -F \sin \gamma \cos \varphi = -42.4 \text{ N}$$

$$F_y = -F \sin \gamma \sin \varphi = -56.6 \text{ N}$$

$$F_z = F \cos \gamma = 70.7 \text{ N}$$

力 \mathbf{F} 作用点 A 的坐标为 $x = 3 \text{ m}$, $y = 4 \text{ m}$, $z = 0$, 于是得

$$M_x(\mathbf{F}) = F_z y - F_y z = 282.8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_y(\mathbf{F}) = F_x z - F_z x = -212.1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_z(\mathbf{F}) = F_y x - F_x y = 0$$

方法 2: 先利用式(5-6)计算力 \mathbf{F} 对点 O 的矩矢 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$, 为此写出力 \mathbf{F} 和矢径 \mathbf{r} 的解析式为

$$\mathbf{F} = -42.4\mathbf{i} - 56.6\mathbf{j} + 70.7\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = \overline{OB} = 5\mathbf{k} \text{ m}$$

于是得

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 282.8\mathbf{i} - 212.1\mathbf{j}$$

再利用式(5-8)或式(5-12)得

$$M_x(\mathbf{F}) = M_{Ox}(\mathbf{F}) = 282.8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_y(\mathbf{F}) = M_{Oy}(\mathbf{F}) = -212.1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_z(\mathbf{F}) = M_{Oz}(\mathbf{F}) = 0$$

(2) 求力对轴 OC 的矩。

先计算沿轴 OC 的单位矢量 \mathbf{e}_c , 即

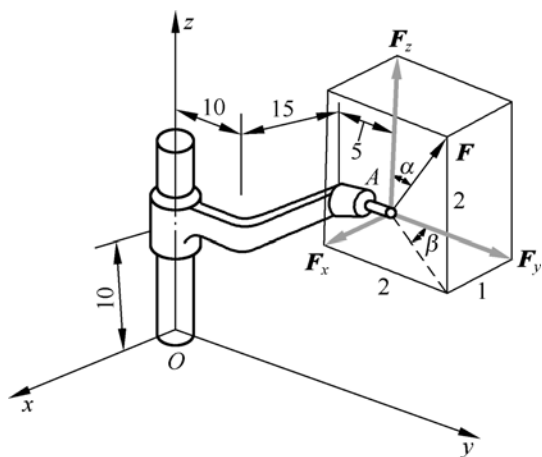
$$\boldsymbol{e}_c = \overline{OC} / |\overline{OC}| = (3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{k}) / \sqrt{34}$$

再利用式(5-13), 得

$$M_{OC}(\boldsymbol{F}) = [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_{OC} = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{e}_c = 145.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

例题 5-3

如例题图 5-3 所示, 托架 OA 套在转轴 z 上, 一个力 \boldsymbol{F} 作用于点 A 。已知 $F = 12 \text{ kN}$, 托架尺寸及点 A 的位置如图所示, 求力对坐标轴 x, y, z 的矩及对坐标原点 O 的矩。



例题图 5-3

解:

力在坐标轴上的投影为

$$F_x = F \sin \alpha \sin \beta = 12 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ kN} = 4 \text{ kN}$$

$$F_y = F \sin \alpha \cos \beta = 12 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ kN} = 8 \text{ kN}$$

$$F_z = F \cos \alpha = 12 \times \frac{2}{3} \text{ kN} = 8 \text{ kN}$$

力作用点 A 的坐标为

$$x = -0.15 \text{ m}, \quad y = 0.15 \text{ m}, \quad z = 0.1 \text{ m}$$

于是, 由式(5-12)和合力矩定理得

$$\begin{aligned} M_x(\boldsymbol{F}) &= M_x(F_x) + M_x(F_y) + M_x(F_z) \\ &= (0 - F_y \times 0.1 + F_z \times 0.15) \text{ N} \cdot \text{m} = 0.4 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y(\boldsymbol{F}) &= M_y(F_x) + M_y(F_y) + M_y(F_z) \\ &= (F_x \times 0.1 + 0 + F_z \times 0.15) \text{ N} \cdot \text{m} = 1.6 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_z(F) &= M_z(F_x) + M_z(F_y) + M_z(F_z) \\
 &= (-F_x \times 0.15 - F_y \times 0.15 + 0) \text{ N} \cdot \text{m} = -1.8 \text{ N} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

力对坐标原点 O 的矩的大小和方向可分别由式(5-9)和式(5-10)得

$$M_O(F) = \sqrt{M_x^2(F) + M_y^2(F) + M_z^2(F)} = 2.44 \text{ kN}$$

$$\cos(F, i) = \frac{M_x(F)}{M_O(F)} = 0.164, \quad \cos(F, j) = \frac{M_y(F)}{M_O(F)} = 0.655, \quad \cos(F, k) = \frac{M_z(F)}{M_O(F)} = -0.737$$

讨论:

该例题也可以先利用式(5-6)计算力对坐标原点 O 的矩, 然后再由力对点的矩与力对轴的矩之间的关系计算力对坐标轴 x, y, z 的矩。

值得注意的是, 在计算力对某轴的矩时, 力沿作用线滑移, 对该轴的矩不变; 力的作用线与某轴平行或相交时, 该力对该轴的矩为零。

力对点(轴)的矩是力使物体绕该点(轴)转动效应的度量, 但是, 这并不意味着物体就一定绕该点(轴)转动。除了主动力之外, 物体的运动状态还与约束有关。在后面的动力学中可以看到, 力矩的计算不要求一定针对转动点(轴)进行。

5.2.2 空间力偶系的合成与平衡

由平面力偶理论知道, 只要不改变力偶矩的大小和转向, 力偶可以在其作用面内任意移转, 且可同时改变力偶中力的大小和力偶臂的长短, 而不改变力偶对刚体的作用效果。实践经验还告诉我们, 力偶的作用面也可以平移。例如, 用螺丝刀拧螺钉时, 只要力偶矩的大小和转向保持不变, 长螺丝刀或短螺丝刀的效果是一样的。即力偶的作用面可以沿垂直于螺丝刀的轴线方向平行移动, 而并不影响拧螺钉的效果。但是, 如果两个力偶的作用面不相互平行(即作用面的法线不相互平行), 即使力偶矩大小相等, 它们对物体的作用效果也不同。

如图 5-6 所示的三个力偶, 分别作用在三个同样的刚性物体上, 力偶矩都等于 $200 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。因为前两个力偶的转向相同, 作用面又相互平行, 因此这两个力偶对物体的作用效果相同, 如图 5-6(a)和(b)所示。第三个力偶作用在平面 II 上, 如图 5-6(c)所示, 虽然它与前两个力偶相比, 力偶矩的大小相同, 但是对物体的作用效果不同, 前者使静止物体绕平行于 x 轴的轴转动, 而后者则使物体绕平行于 y 轴的轴转动。

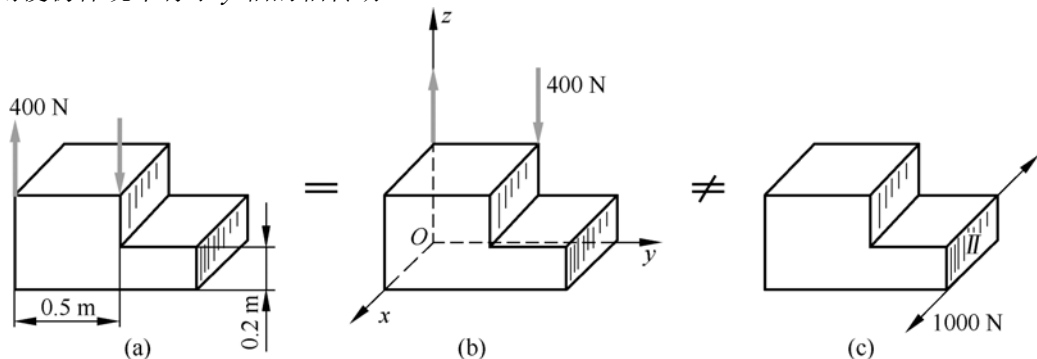


图 5-6 作用在不同面上的力偶

力偶矩的矢量表示

由以上叙述可知, 空间力偶对刚体的作用除了与力偶矩大小有关外, 还与其作用面的方位有关。因此, 空间力偶对刚体的作用效果决定于以下三个因素: ①力偶矩的大小; ②力偶作用面的方位; ③力偶的转向。

这三个因素称为力偶的三要素。与力类似, 空间力偶的三个要素可以用一个矢表征, 矢量的长度表示力偶矩的大小, 矢量的方位与力偶作用面的法线方位相同, 矢量的指向与力偶转向的关系服从右手螺旋法则。即如果以力偶的转向为右手螺旋的转动方向, 则螺旋前进的方向即为矢量的指向, 如图 5-7(b)所示。该矢量称为力偶矩矢, 记作 \mathbf{M} 。力偶对刚体的作用完全由力偶矩矢所决定。

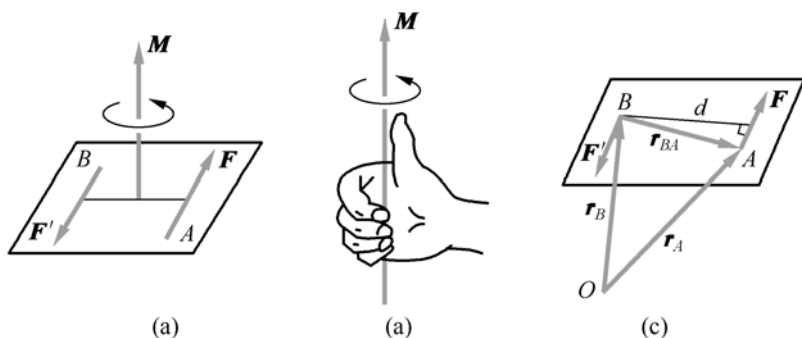


图 5-7 力偶矩矢

应该指出, 由于力偶可以在同平面内任意移转, 并可搬移到平行平面内, 而不改变它对刚体的作用效果, 故力偶矩矢可以平移, 且无须确定矢量的矢端位置。这样的矢量称为自由矢量。

如图 5-7(c)所示, 组成力偶的两个力 \mathbf{F} 和 \mathbf{F}' 对空间任意一点 O 的矩的矢量和为

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}, \mathbf{F}') = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}) + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}') = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}'$$

式中, \mathbf{r}_A 与 \mathbf{r}_B 分别为由点 O 到二力作用点 A 和 B 的矢径。因 $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$, 故上式可写为

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}, \mathbf{F}') = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}' = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F} \quad (5-15)$$

显然, $\mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}$ 的大小等于 Fd , 方向与力偶矩矢 \mathbf{M} 一致。由此可见, 力偶对空间任意一点的矩都是相等的, 都等于力偶矩, 与矩心位置无关。这进一步说明力偶矩矢为自由矢量。

综上所述, 力偶的等效条件为: 两个力偶的力偶矩矢相等。也就是说, 在保持力偶三要素不变的前提下, 可以任意改变力偶在作用面内的位置以及力偶的作用面, 或同时改变力的大小和方向以及力偶臂的长短都不影响力偶对刚体的作用效果。

空间力偶系的合成

可以证明, 任意多个空间分布的力偶可合成为一个合力偶, 合力偶矩矢等于各分力偶矩矢的矢量和, 即

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \cdots + \mathbf{M}_n = \sum \mathbf{M}_i \quad (5-16)$$

下面以两个力偶的合成为例来证明这个结论, 如图 5-8 所示。

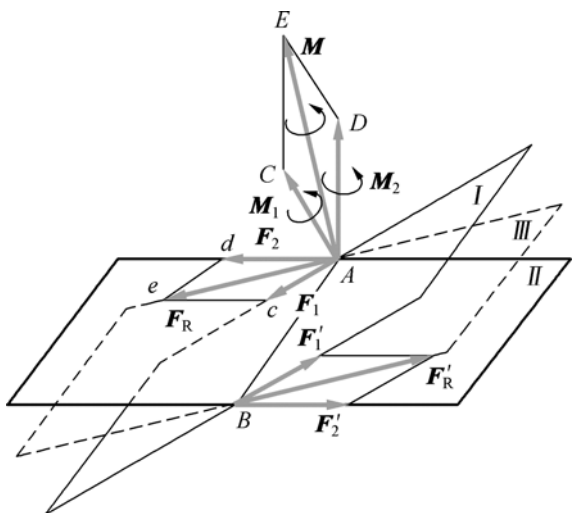


图 5-8 空间力偶系的合成

第一步：证明矩为 M_1 和 M_2 分别作用在平面 I 和 II 内的两个力偶合成为一个力偶。

在平面 I 和 II 的交线上取任意一条线段 $AB = d$ ，根据同一平面内力偶的等效条件，将两个力偶各在其作用面内移转和变换，使它们的力偶臂与线段 AB 重合，而保持力偶矩的大小和力偶的转向不变。这时，两个力偶分别为 (F_1, F_1') 和 (F_2, F_2') ，它们的力偶矩矢分别为 M_1 和 M_2 。将力 F_1 与 F_2 合成为力 F_R ，力 F_1' 与 F_2' 合成为力 F_R' 。由图 5-8 可见，力 F_R 与 F_R' 等值而反向，组成一个力偶，即为合力偶，它作用在平面 III 内，令合力偶矩矢为 M 。

第二步：证明合力偶矩矢 M 等于原有两个力偶矩矢 M_1 和 M_2 的矢量和。

由图 5-8 易证，四边形 $ACED$ 与平行四边形 $Aced$ 相似，因而 $ACED$ 也是一个平行四边形。于是可得

$$M = M_1 + M_2$$

如有 n 个空间力偶，按上法逐次合成，即可证明式(5-16)成立。设合力偶矩矢在 x, y, z 轴上的投影为 M_x, M_y, M_z 。将每个力偶矩矢分别向 x, y, z 轴投影，再相加，得

$$M_x = \sum M_{ix}, \quad M_y = \sum M_{iy}, \quad M_z = \sum M_{iz} \quad (5-17)$$

即合力偶矩矢在 x, y, z 轴上的投影等于各分力偶矩矢在相应轴上投影的代数和。

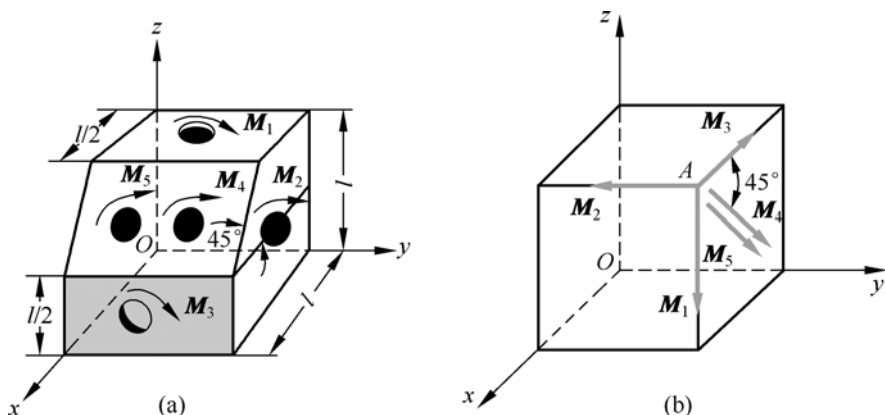
计算出合力偶矩矢的投影后，合力偶矩矢的大小和方向余弦可由下式给出：

$$M = \sqrt{\left(\sum M_{ix}\right)^2 + \left(\sum M_{iy}\right)^2 + \left(\sum M_{iz}\right)^2} \quad (5-18)$$

$$\cos(M, i) = \frac{M_x}{M}, \quad \cos(M, j) = \frac{M_y}{M}, \quad \cos(M, k) = \frac{M_z}{M} \quad (5-19)$$

例题 5-4

工件如例题图 5-4(a)所示，它的四个面上同时钻五个孔，每个孔所受的切削力偶矩均为 $80 \text{ N}\cdot\text{m}$ 。求工件所受合力偶的矩在 x, y, z 轴上的投影 M_x, M_y, M_z ，并求合力偶矩矢的大小和方向。



例题图 5-4

解:

先将作用在四个面上的力偶用力偶矩矢表示, 并将它们平移到点 A , 如例题图 5-4(b)所示, 有

$$M_x = \sum M_{ix} = M_3 - M_4 \cos 45^\circ - M_5 \cos 45^\circ = -193.1 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_y = \sum M_{iy} = -M_2 = -80 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_z = \sum M_{iz} = -M_1 - M_4 \cos 45^\circ - M_5 \cos 45^\circ = -193.1 \text{ N}\cdot\text{m}$$

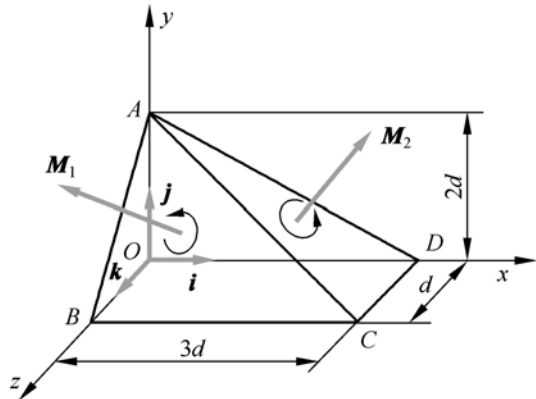
合力偶矩矢的大小和方向余弦为

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 284.6 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\cos(\mathbf{M}, \mathbf{i}) = \frac{M_x}{M} = -0.6786, \quad \cos(\mathbf{M}, \mathbf{j}) = \frac{M_y}{M} = -0.2811, \quad \cos(\mathbf{M}, \mathbf{k}) = \frac{M_z}{M} = -0.6786$$

例题 5-5

四棱锥的 ABC 和 ACD 面上分别作用有力偶 \mathbf{M}_1 和 \mathbf{M}_2 , 如例题图 5-5 所示。已知: $M_1 = M_2 = M_0$, 试求作用在刚体上的合力偶。



例题图 5-5

分析: 首先应在图示坐标系下写出力偶 M_1 和 M_2 的解析表示式, 然后利用式(5-16)求合力偶矩。

解:

设 r_1 和 r_2 分别为沿二力偶作用面法线的任意矢量, n_1 和 n_2 分别为二力偶作用面的单位法线矢量, 则

$$n_2 = \frac{r_2}{|r_2|}, \quad n_1 = \frac{r_1}{|r_1|}$$

式中, r_1 和 r_2 可分别取为

$$r_1 = r_{CA} \times r_{CB} = (-3d\mathbf{i} + 2d\mathbf{j} - d\mathbf{k}) \times (-3d\mathbf{i}) = 3d^2\mathbf{j} + 6d^2\mathbf{k}$$

$$r_2 = r_{CD} \times r_{DA} = (-d\mathbf{k}) \times (-3d\mathbf{i} + 2d\mathbf{j}) = 2d^2\mathbf{i} + 3d^2\mathbf{j}$$

所以

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{j} + 2\mathbf{k}), \quad n_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

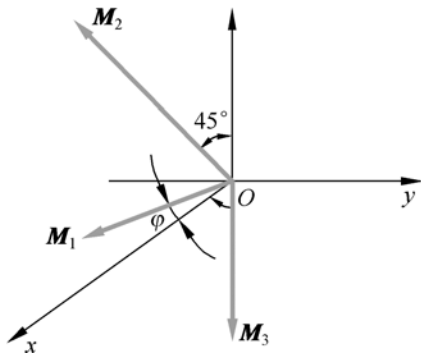
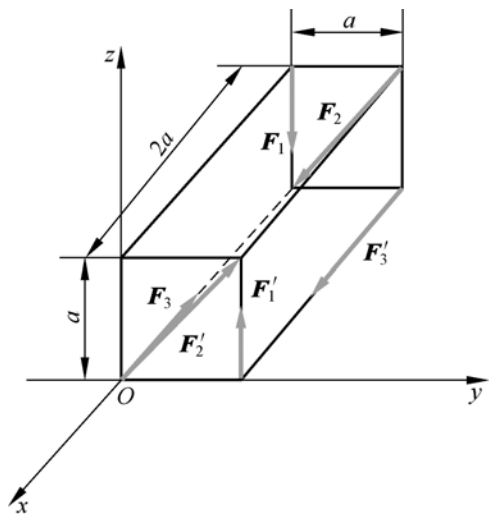
因此

$$M_1 = M_1 n_1 = \frac{M_0}{\sqrt{5}}(\mathbf{j} + 2\mathbf{k}), \quad M_2 = M_2 n_2 = \frac{M_0}{\sqrt{13}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

$$M = M_1 + M_2 = M_0(0.555\mathbf{i} + 1.279\mathbf{j} + 0.899\mathbf{k})$$

例题 5-6

求例题图 5-6 所示力偶系的合力偶。



例题图 5-6

解:

合力偶矩矢的各个分量为

$$M_x = \sum M_{ix} = M_1 \cos \varphi = M_1 \times \frac{a}{\sqrt{5a}} = 10 \times \sqrt{5a} \times \frac{a}{\sqrt{5a}} \text{ N} \cdot \text{cm} = 100 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

$$M_y = \sum M_{iy} = -M_1 \sin \varphi - M_2 \sin 45^\circ = \left(-10 \times \sqrt{5a} \times \frac{2a}{\sqrt{5a}} - 32a \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ N} \cdot \text{cm} = -426.3 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

$$M_z = \sum M_{iz} = M_2 \sin 45^\circ - M_2 = \left(32a \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 20a \right) \text{ N} \cdot \text{cm} = 26.27 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

于是, 得

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(100)^2 + (426.3)^2 + (26.77)^2} \text{ N} \cdot \text{cm} = 438.6 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

$$\cos \alpha = \frac{M_x}{M} = \frac{100}{438.6} = 0.288, \quad \alpha = 76^\circ 48'$$

$$\cos \beta = \frac{M_y}{M} = \frac{426.3}{438.6} = -0.9718, \quad \beta = 166^\circ 24'$$

空间力偶系的平衡

由于空间力偶系可由一个合力偶来代替, 因此, 空间力偶系平衡的充分必要条件是: 该力偶系的合力偶矩等于零, 即所有力偶矩矢的矢量和等于零:

$$\sum \boldsymbol{M}_i = 0 \quad (5-20)$$

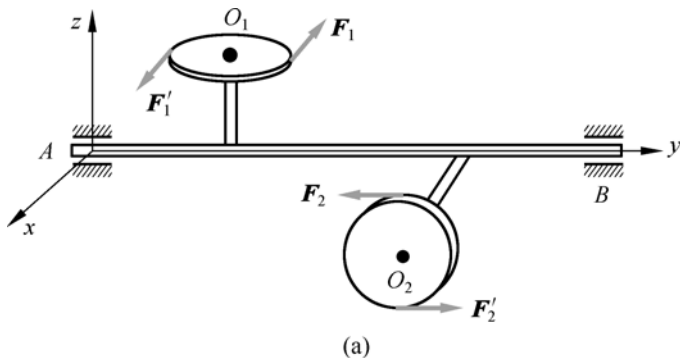
或写成投影形式:

$$\sum M_{ix} = 0, \quad \sum M_{iy} = 0, \quad \sum M_{iz} = 0 \quad (5-21)$$

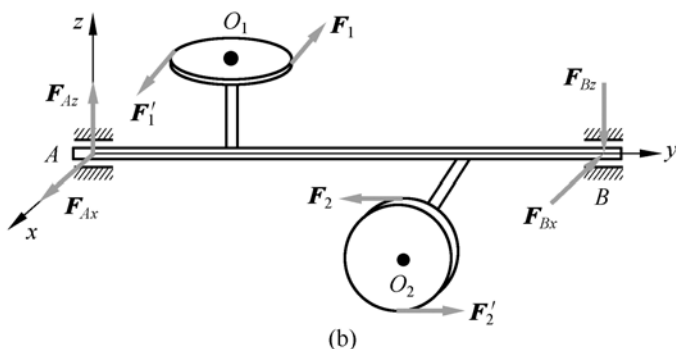
即空间力偶系平衡的充分必要条件也可叙述为: 该力偶系中所有各力偶矩矢在三个坐标轴上投影的代数和分别等于零。上述三个方程是空间力偶系的平衡方程, 它们之间相互独立, 可求解三个未知量。

例题 5-7

如例题图 5-7(a)所示, 半径为 200 mm 的圆盘 O_1 和 O_2 与水平轴 AB 固连且分别垂直于 z 轴和 x 轴, 圆盘上分别作用力偶 (F_1, F'_1) 和 (F_2, F'_2) 。已知 $F_1 = 3 \text{ N}$, $F_2 = 5 \text{ N}$, $AB = 800 \text{ mm}$, 不计构件自重。求轴承 A 和 B 处的约束力。



例题图 5-7



例题图 5-7 (续)

分析：取构件整体为研究对象，主动力只有力偶，由于轴承不能提供 y 方向的约束力，而力偶只能由力偶平衡，所以轴承 A 和 B 处的约束力也应形成力偶。根据力偶平衡条件可求得解答。

解：

取构件整体为研究对象，轴承 A 和 B 处的约束力如例题图 5-7(b)所示，其中 $F_{Ax} = -F_{Bx}$ ， $F_{Az} = -F_{Bz}$ ，由力偶系的平衡方程(5-21)得

$$\sum M_{ix} = 0, \quad 400F_2 - 800F_{Az} = 0$$

$$\sum M_{iz} = 0, \quad 400F_1 + 800F_{Ax} = 0$$

解得

$$F_{Ax} = F_{Bx} = -1.5 \text{ N}, \quad F_{Az} = F_{Bz} = 2.5 \text{ N}$$

5.3 空间任意力系的简化

本节讨论空间任意力系的简化，并分析最终的简化结果。

主矢和主矩

与第 4 章平面任意力系的简化方法一样，应用力的平移定理，依次将作用于刚体上的每个力向简化中心 O 平移，同时附加一个相应的力偶。这样，原来的空间任意力系被空间汇交力系和空间力偶系两个简单力系等效替换，如图 5-9 所示。其中

$$\mathbf{F}'_i = \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{M}_{Oi} = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i)$$

作用于点 O 的空间汇交力系可合成一个力 \mathbf{F}'_R ，此力的作用线通过点 O ，其大小和方向等于力系的主矢，即

$$\mathbf{F}'_R = \sum \mathbf{F}'_i = \sum \mathbf{F}_i = i \sum F_{ix} + j \sum F_{iy} + k \sum F_{iz} \quad (5-22)$$

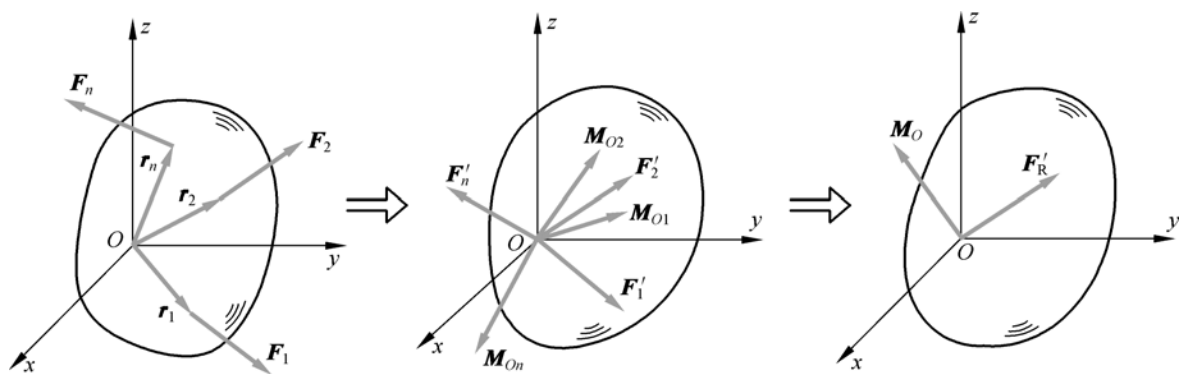


图 5-9 空间力系向一点简化得到的主矢和主矩

空间分布的力偶系可合成为一个力偶。以 M_O 表示其力偶矩矢，它等于各附加力偶矩矢的矢量和，又等于各力对于点 O 的矩的矢量和，即原力系对点 O 的主矩

$$\begin{aligned} M_O &= \sum M_i = \sum M_O(F_i) = \sum (r_i \times F_i) \\ &= \sum [(y_i F_{iz} - z_i F_{iy})\mathbf{i} + (z_i F_{ix} - x_i F_{iz})\mathbf{j} + (x_i F_{iy} - y_i F_{ix})\mathbf{k}] \end{aligned} \quad (5-23)$$

于是，可得如下结论：空间任意力系向任意一点 O 简化，得到一个力和一个力偶。其中力的大小和方向等于该力系的主矢，作用线通过简化中心 O ；力偶的矩矢等于该力系对简化中心的主矩。此力系主矢的大小和方向余弦分别为

$$\begin{aligned} F'_R &= \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2 + (\sum F_{iz})^2} \\ \cos(F'_R, \mathbf{i}) &= \frac{\sum F_{ix}}{F'_R}, \quad \cos(F'_R, \mathbf{j}) = \frac{\sum F_{iy}}{F'_R}, \quad \cos(F'_R, \mathbf{k}) = \frac{\sum F_{iz}}{F'_R} \end{aligned}$$

对点 O 的主矩的大小和方向余弦分别为

$$\begin{aligned} M_O &= \sqrt{[\sum M_x(F_i)]^2 + [\sum M_y(F_i)]^2 + [\sum M_z(F_i)]^2} \\ \cos(M_O, \mathbf{i}) &= \frac{\sum M_x(F_i)}{M_O}, \quad \cos(M_O, \mathbf{j}) = \frac{\sum M_y(F_i)}{M_O}, \quad \cos(M_O, \mathbf{k}) = \frac{\sum M_z(F_i)}{M_O} \end{aligned}$$

与平面任意力系一样，主矢与简化中心的位置无关，而一般情况下，主矩与简化中心的位置有关。

空间任意力系的简化结果分析

空间任意力系向一点简化，会得到一个主矢和一个主矩。按主矢和主矩是否为零来分，可能有以下四种情况。

(1) $F'_R = 0$, $M_O \neq 0$ —— 简化结果：一个合力偶。

此时，作用于简化中心 O 的力相互平衡，但附加力偶系不平衡，合成为一个合力偶，该合力偶矩矢等于原力系对简化中心的主矩。由于力偶矩矢与矩心位置无关，因此，在这种情况下，主矩与简化中心的位置无关。

(2) $F'_R \neq 0, M_O = 0$ ——简化结果：一个合力。

此时，当将力平移至简化中心 O 时，附加力偶系平衡，作用于简化中心的力系不平衡，合成为一个合力，合力的作用线通过简化中心 O ，其大小和方向等于原力系的主矢。

(3) $F'_R \neq 0, M_O \neq 0$ ——又分以下三种情况。

① $F'_R \perp M_O$ ——进一步简化结果：一个合力。

若空间任意力系向一点简化的结果为主矢 F'_R 和主矩 M_O 都不为零且相互垂直，如图 5-10(a) 所示，则力 F'_R 和矩矢为 M_O 的力偶 (F''_R, F_R) 在同一平面内，如图 5-10(b) 所示。此时，与平面力系的简化类似，可将力 F'_R 与力偶 (F''_R, F_R) 进一步合成，得到作用于点 O' 的一个力 F_R ，如图 5-10(c) 所示。此力即为原力系的合力，其大小和方向等于原力系的主矢，即

$$F_R = F'_R = \sum F_i$$

其作用线离简化中心 O 的距离为

$$d = \frac{|M_O|}{|F'_R|} = \frac{M_O}{F'_R}$$

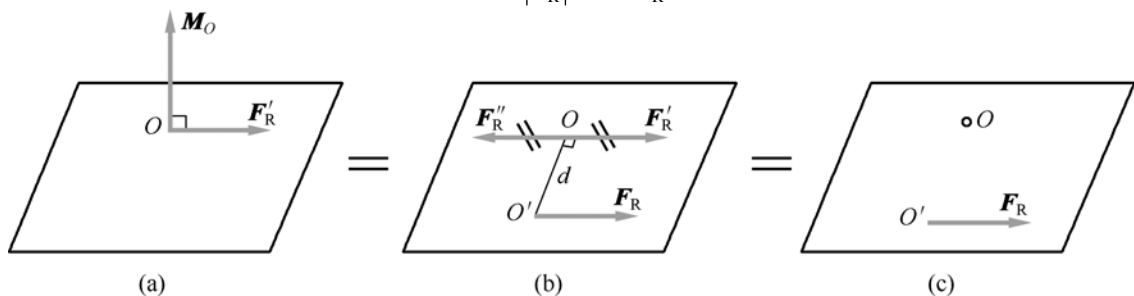


图 5-10 主矢和主矩垂直时的最终简化结果——合力

② $F'_R \parallel M_O$ ——进一步简化结果：力螺旋。

如果空间任意力系向一点简化后，主矢 F'_R 和主矩 M_O 都不等于零且相互平行，则得到由一个力和一个力偶组成的力系，其中的力垂直于力偶的作用面，这种力系称为力螺旋 (wrench)，如图 5-11 所示。力螺旋是由静力学的两个基本要素——力和力偶组成的最简单的力系，不能再进一步简化。力偶的转向和力的指向符合右手螺旋法则的称为右螺旋，如图 5-11(a) 所示，否则称为左螺旋，如图 5-11(b) 所示。力螺旋的力作用线称为该力螺旋的中心轴。在上述情形下，中心轴通过简化中心。力螺旋在实际中经常出现，如钻孔时的钻头对工件的作用，以及拧木螺钉时螺丝刀对螺钉的作用等都是力螺旋。

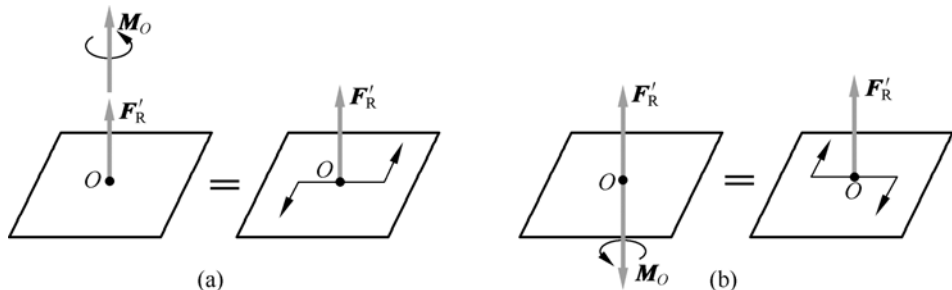


图 5-11 主矢和主矩平行时的最终简化结果——力螺旋

③ F'_R 与 M_O 即不平行也不垂直——进一步简化结果：力螺旋。

如果空间任意力系向一点简化后，主矢 F'_R 和主矩 M_O 都不等于零，且两者既不平行，也不

垂直,如图 5-12(a)所示。此时,可将 M_O 分解为两个分力偶 M'_O 和 M''_O , 它们分别平行和垂直于 F'_R ,如图 5-12(b)所示,则 M''_O 和 F'_R 可用作用于点 O' 的力 F_R 来代替。由于力偶矩矢是自由矢量,故可将 M'_O 平行移动,使之与 F_R 共线。这样便得到一个力螺旋,其中心轴不在简化中心 O ,而是通过点 O' ,如图 5-12(c)所示。 O, O' 两点间的距离为

$$d = \frac{|M''_O|}{|F'_R|} = \frac{M_O \sin \alpha}{F'_R}$$

可见,一般情形下空间任意力系可等效为一个力螺旋。

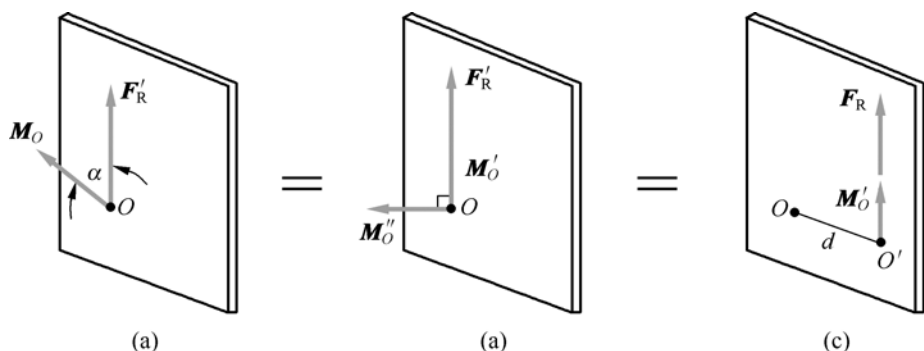


图 5-12 主矢和主矩既不平行也不垂直时的最终简化结果——力螺旋

(4) $F'_R = 0, M_O = 0$ ——简化结果: 力系平衡。

当空间任意力系向某一点简化时,若主矢和主矩都等于零,则表示该力系处于平衡,这将在下一节详细讨论。

归结起来,空间任意力系简化的最终结果有以下四类:

(1) 一个力偶: $F'_R = 0, M_O \neq 0$;

(2) 一个合力: $F'_R \neq 0, M_O = 0$, 或 $F'_R \neq 0, M_O \neq 0$ 且 $F'_R \perp M_O$ (需要进一步确定新的简化中心进行简化);或者说若空间任意力系的主矢不为零,且主矩为零或垂直于主矢,则这个力系一定可以等效为一个集中力。

(3) 一个力螺旋: $F'_R \neq 0, M_O \neq 0$ 且 $F'_R // M_O$, 或 $M_O \neq 0$ 且 M_O 不垂直于 F'_R (需要进一步确定新的简化中心进行简化);或者说若空间任意力系的主矢不为零,且主矩不垂直于主矢,则这个力系一定可以等效为一个力螺旋。

(4) 平衡力系: $F'_R = 0, M_O = 0$ 。

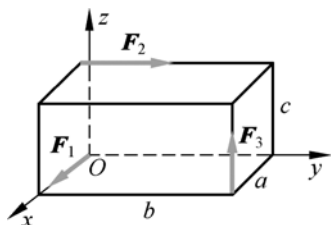
由上可见,力系的主矢与主矩是否正交(即垂直),是判断力系能否进一步简化成一个力的条件,即若力系的主矢与对某一点的主矩(不为零)正交,则力系存在合力。

例题 5-8

如例题图 5-8 所示,沿长方体不相交且不平行的棱上作用三个大小等于 F 的力。问棱长 a, b, c 满足什么关系时,该力系能简化为一个力,并求该力的作用线方程。

解:

选例题图 5-8 所示坐标原点 O 为简化中心,则



例题图 5-8

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F, \quad \sum F_y = F, \quad \sum F_z = F \\ \sum M_x &= Fb - Fc, \quad \sum M_y = -Fa, \quad \sum M_z = 0\end{aligned}$$

因为当主矢和主矩垂直时才存在合力，所以令主矢和对点 O 的主矩垂直，得

$$\mathbf{F}_R \cdot \mathbf{M}_O = (\sum F_x) \cdot \sum M_x + (\sum F_y) \cdot \sum M_y + (\sum F_z) \cdot \sum M_z = 0$$

即

$$F(Fb - Fc) + F(-Fa) + F \times 0 = 0$$

由此得

$$b - c - a = 0$$

此时，该力系可简化为一个合力。

设 (x, y, z) 为该力作用线上任意一点，其矢径为 \mathbf{r} ，则由 $\mathbf{r} \times \mathbf{F}_R = \mathbf{M}_O$ 得

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F & F & F \end{vmatrix} = F(b - c)\mathbf{i} - Faj$$

令上式两端 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 的系数相同，并利用 $b - c - a = 0$ ，得

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z - x + a = 0 \end{cases}$$

此即为所求合力作用线的方程。

5.4 空间任意力系的平衡分析

本节将在上一节空间力系简化的基础上给出空间力系平衡的基本方程和分析方法。

平衡方程

上一节空间力系简化的情况(4)即给出空间任意力系平衡的充分必要条件：力系的主矢和对某一点的主矩都等于零，即

$$\mathbf{F}'_R = 0, \quad \mathbf{M}_O = 0$$

由式(5-22)和式(5-23)，可得空间任意力系平衡方程的基本形式（略去下标 i ）：

$$\begin{cases} \sum F_x = 0, & \sum F_y = 0, & \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0, & \sum M_y = 0, & \sum M_z = 0 \end{cases} \quad (5-24)$$

即空间任意力系平衡的充分必要条件可叙述为：力系中各力在三个坐标轴上投影的代数和分别等于零，各力对每个轴的矩的代数和也等于零。这 6 个平衡方程是相互独立的，可求解 6 个未知量。

从空间任意力系平衡方程的基本形式还可以看出：平衡力系对任意一点或任意一个轴的主矩都应等于零。所以，与平面任意力系的平衡方程类似，空间任意力系平衡方程除基本形式外，还可以有 4 矩式、5 矩式、6 矩式三种形式。以分析和计算方便为目的，可根据具体问题选择应用平衡方程的具体形式。

对于作用线相互平行（设平行于 z 轴）的空间平行力系（参见例题 4-2），由于各力在 x, y 轴的投影和对 z 轴的矩都为零，所以只有 3 个平衡方程：

$$\sum F_z = 0, \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0$$

(5-25)

空间约束

前面已陆续介绍了一些工程中常见的平面二维约束及约束力的分析方法。一般情况下，当刚体受到空间任意力系作用时，在每个约束处，其约束力数目可能有 1~6 个。决定每种约束的约束力个数的基本方法是：观察被约束物体在空间可能的 6 种独立的位移（沿 x, y, z 轴的平动和绕这三个轴的转动），其中有哪个位移被约束所阻碍则就存在与该约束位移相应的约束力。阻碍平动的是约束力；阻碍转动的是约束力偶。常见的空间约束及其相应的约束力见表 5-2，其中第 1, 2 排列出的是平面约束，为空间约束的退化形式。

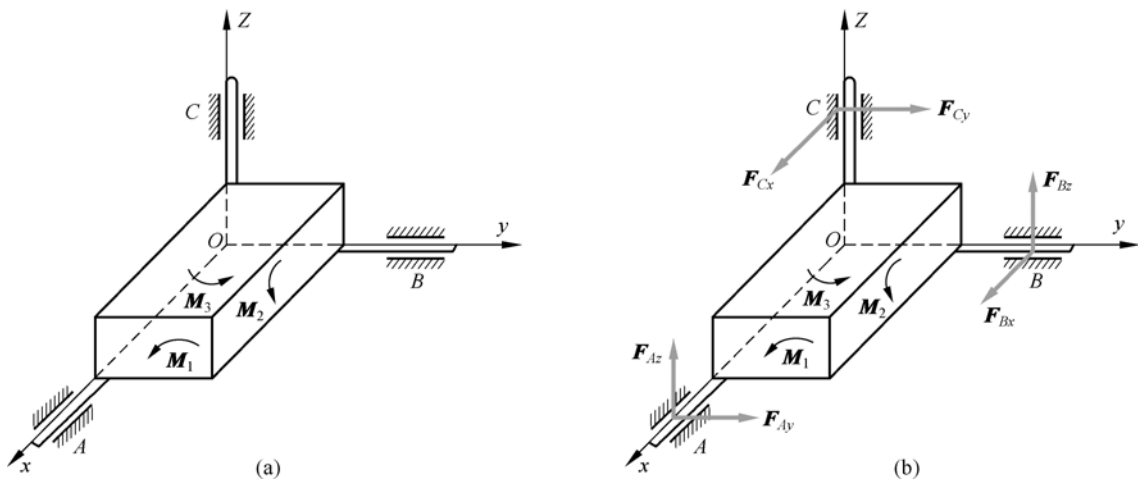
表 5-2 常见空间约束及其相应的约束力

约束反力未知量		约束类型			
1		光滑表面	滚动支座	绳索	二力杆
2		径向轴承	圆柱铰链	铁轨	碟铰链
3		球形铰链	止推轴承		
4	(a)	导向轴承	万向接头		
	(b)			(a)	(b)
5	(a)	带有销子的夹板	导轨		
	(b)			(a)	(b)
6		空间的固定端支座			

正确把握约束和约束力是物体受力分析的关键。在分析实际的约束时,有时要忽略一些次要因素,抓住主要因素,做一些合理的简化。例如,导向轴承能阻碍轴沿 y, z 轴的移动,以及绕 y, z 轴的转动,所以有 4 个约束力 F_{Ay}, F_{Az}, M_{Ay} 和 M_{Az} ; 而径向轴承对轴绕 y, z 轴转动的限制作用很弱,故 M_{Ay} 和 M_{Az} 可忽略不计,所以只有 2 个约束力 F_{Ay} 和 F_{Az} 。又如,一般小柜门都装有两个合页,形如表 5-2 中的蝶铰链,它主要限制物体沿 y, z 方向的移动,因而有 2 个约束力 F_{Ay} 和 F_{Az} 。合页不限制物体绕转轴的转动,单个合页对物体绕 y, z 轴转动的限制作用也很小,因而没有约束力偶。而当物体受到沿合页的轴向作用力时,其中一个合页将限制物体轴向移动,应视为止推轴承。

例题 5-9

如例题图 5-9(a)所示,不计自重的长方体由轴承固定, $OA = a, OB = b, OC = c$, 在三个相互垂直的表面上作用有矩为 M_1, M_2, M_3 的力偶。求平衡时轴承 A, B, C 处的约束力。



例题图 5-9

解:

取长方体为研究对象, 受力如例题图 5-9(b)所示, 共有 6 个未知约束力。根据空间力系的平衡方程得

$$\begin{aligned}
 \sum F_x &= 0, & F_{Bx} + F_{Cx} &= 0 \\
 \sum F_y &= 0, & F_{Ay} + F_{Cy} &= 0 \\
 \sum F_z &= 0, & F_{Az} + F_{Bz} &= 0 \\
 \sum M_x &= 0, & M_1 + F_{Bz} \cdot b - F_{Cy} \cdot c &= 0 \\
 \sum M_y &= 0, & M_2 - F_{Az} \cdot a + F_{Cx} \cdot c &= 0 \\
 \sum M_z &= 0, & M_3 + F_{Ay} \cdot a - F_{Bx} \cdot b &= 0
 \end{aligned}$$

联立求解上述方程组得

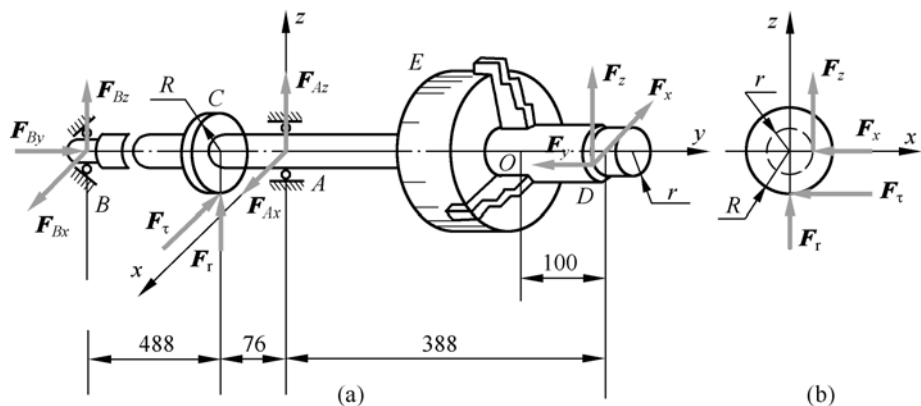
$$F_{Bx} = -F_{Cx} = \frac{1}{2bc}(-aM_1 + bM_2 + cM_3)$$

$$F_{Ay} = -F_{Cy} = \frac{1}{2ac}(-aM_1 + bM_2 - cM_3)$$

$$F_{Az} = -F_{Bz} = \frac{1}{2ab}(aM_1 + bM_2 - cM_3)$$

例题 5-10

车床主轴如例题图 5-10(a)所示。已知车刀对工件的切削力为：径向切削力 $F_x = 4.25 \text{ kN}$ ，纵向切削力 $F_y = 6.8 \text{ kN}$ ，主切削力（切向） $F_z = 17 \text{ kN}$ ，方向如例题图 5-10(a)所示。 F_τ 和 F_r 分别为作用在直齿轮 C 上的切向力和径向力，且 $F_r = 0.36 F_\tau$ 。齿轮 C 的节圆半径为 $R = 50 \text{ mm}$ ，被切削件的半径为 $r = 30 \text{ mm}$ 。卡盘及工件等自重不计，其余尺寸如例题图 5-10(a)（单位为 mm）所示。求：(1) 齿轮啮合力 F_τ 及 F_r ；(2) 径向轴承 A 和止推轴承 B 的约束力；(3) 三爪卡盘 E 在 O 处对工件的约束力。



例题图 5-10

解：

(1) 先取主轴、卡盘、齿轮及工件系统为研究对象，受力如例题图 5-10(a)所示，为一空间任意力系。取坐标系 $Axyz$ 如图所示，列平衡方程如下：

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Bx} - F_\tau + F_{Ax} - F_z = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{By} - F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0, \quad F_{Bz} + F_r + F_{Az} + F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0, \quad -(488 + 76)F_{Bz} - 76F_r + 388F_z = 0$$

$$\sum M_y = 0, \quad F_\tau R - F_z r = 0$$

$$\sum M_z = 0, \quad (488 + 76)F_{Bx} - 76F_\tau - 30F_y + 388F_x = 0$$

按题意有

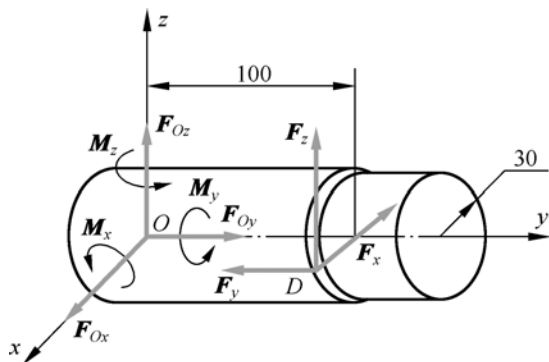
$$F_r = 0.36 F_\tau$$

以上共有 7 个方程, 联立可解出全部 7 个未知量, 即

$$F_\tau = 10.2 \text{ kN}, F_r = 3.67 \text{ kN}, F_{Ax} = 15.64 \text{ kN}, F_{Az} = -31.87 \text{ kN}$$

$$F_{Bx} = -1.19 \text{ kN}, F_{By} = 6.8 \text{ kN}, F_{Bz} = 11.2 \text{ kN}$$

(2) 再取工件为研究对象, 如例题图 5-10(c)所示, 其上除了受 3 个切削力外, 还受到卡盘(空间插入端约束)对工件的 6 个约束力 $F_{Ox}, F_{Oy}, F_{Oz}, M_x, M_y$ 和 M_z 。



例题图 5-10(c)

取坐标轴系 $Oxyz$, 列平衡方程:

$$\sum F_x = 0, F_{Ox} - F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{Oy} - F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0, F_{Oz} - F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0, M_x + 100 F_z = 0$$

$$\sum M_y = 0, M_y - 30 F_z = 0$$

$$\sum M_z = 0, M_z + 100 F_x - 30 F_y = 0$$

求解上述方程, 得

$$F_{Ox} = 4.25 \text{ kN}, F_{Oy} = 6.8 \text{ kN}, F_{Oz} = -17 \text{ kN}$$

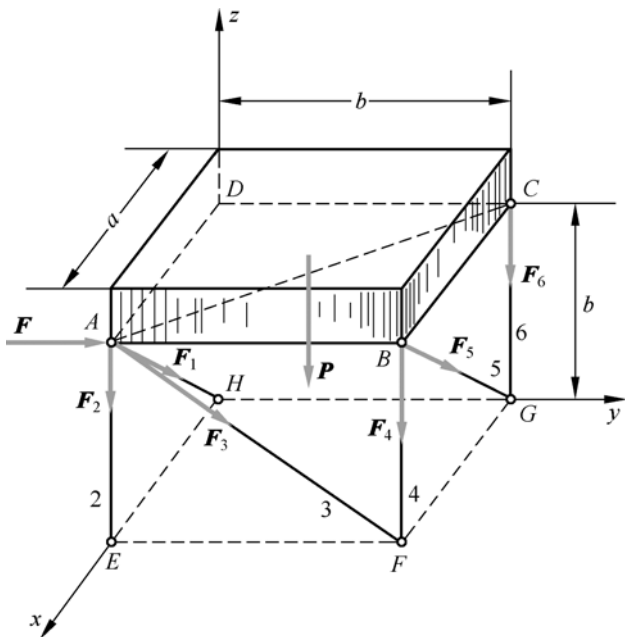
$$M_x = -1.7 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_y = 0.51 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_z = -0.22 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

以上例题的求解利用了空间任意力系平衡方程的基本形式, 可求解 6 个未知量。但在很多情况下, 为了使解题简便, 可选取 3~6 个力矩方程。而且在选取力投影轴和力矩轴时, 为尽可能做到一个方程含有一个未知力(或尽可能少的未知量), 避免求解复杂的联立方程组。应注意: ①选择适当的力投影轴, 使更多的未知力尽可能地与该轴垂直; ②力矩轴应选择与

未知力相交或平行的轴；③力投影轴和力矩轴不一定是同一轴，所选择的轴也不一定都是正交的。现举例如下。

例题 5-11

如例题图 5-11 所示，均质长方板由六根直杆支持于水平位置，直杆两端各用球铰链与板和地面连接。板重为 P ，在 A 处作用一水平力 F ，且 $F = 2P$ 。求各杆的内力。



例题图 5-11

分析：直杆均为二力杆，设它们均受拉力，则长方体板受到 6 个力 $F_1 \sim F_6$ 的作用，如图所示。若以 AB 轴列力矩方程，则只有未知力 F_6 出现；以 AE 轴列力矩方程，则只有未知力 F_5 出现（ F_4 和 F_6 平行于 AE ）；再依次以 AC, EF, FG, BG 为轴列力矩方程，可逐次求得未知力 F_4, F_1, F_2, F_3 ，无须解联立方程组。

解：

取长方体板为研究对象，其受力如图所示。根据上面的分析，先依次以 AB, AE, AC, EF 为轴列力矩平衡方程，并逐次求解得

$$\sum M_{AB} = 0, \quad -F_6 a - P \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow F_6 = -\frac{P}{2} \quad (\text{压力}) \quad (\text{a})$$

$$\sum M_{AE} = 0 \Rightarrow F_5 = 0$$

$$\sum M_{AC} = 0 \Rightarrow F_4 = 0$$

$$\sum M_{EF} = 0, \quad -P \frac{a}{2} - F_6 a - F_1 \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} b = 0 \quad (\text{b})$$

将式(a)代入式(b)，得

$$F_1 = 0$$

再以 FG, BG 为轴列力矩平衡方程, 得

$$\sum M_{FG} = 0, -P \frac{b}{2} + Fb - F_2 b = 0 \Rightarrow F_2 = 1.5 P \quad (c)$$

$$\sum M_{BC} = 0, -P \frac{b}{2} - F_2 b - F_3 \cos 45^\circ b = 0 \quad (d)$$

将式(c)代入式(d), 得

$$F_3 = -2\sqrt{2}P \quad (\text{压力})$$

讨论:

从该例题的求解过程可以看出, 一般力矩方程比较灵活, 常可使一个方程只含一个未知量。当然, 在用力矩方程获得部分未知量后, 也可以采用其他形式的平衡方程求解。如用 $\sum F_x = 0$ 代替式(b), 同样可求得 $F_1 = 0$; 用 $\sum F_y = 0$ 代替式(d), 同样可求得 $F_3 = -2\sqrt{2}P$ 。

例题 5-12

例题图 5-12 所示的是水力涡轮发电机中的主轴。水力推动涡轮转动的力偶矩 $M_z = 1200 \text{ N}\cdot\text{m}$ 。在锥齿轮 B 处受到的力分解为三个分力: 圆周力 F_t 、轴向力 F_a 和径向力 F_r 。三者的大小比例为 $F_t : F_a : F_r = 1 : 0.32 : 0.17$ 。已知涡轮连同轴和锥齿轮的总重量为 $W = 12 \text{ kN}$, 其作用线沿轴 z ; 锥齿轮的平均半径 $OB = 0.6 \text{ m}$, 其余尺寸如图所示。试求: 止推轴承 C 和轴承 A 的约束力。

解:

以“轴—锥齿轮—涡轮”组成的系统为研究对象, 系统受力如图所示。先求锥齿轮 B 处三个分力大小。根据所有力对 z 轴的力矩平衡方程, 有

$$\sum M_z(F) = 0, \quad M_z - F_t \cdot OB = 0$$

由此解得作用在锥齿轮上的圆周力为

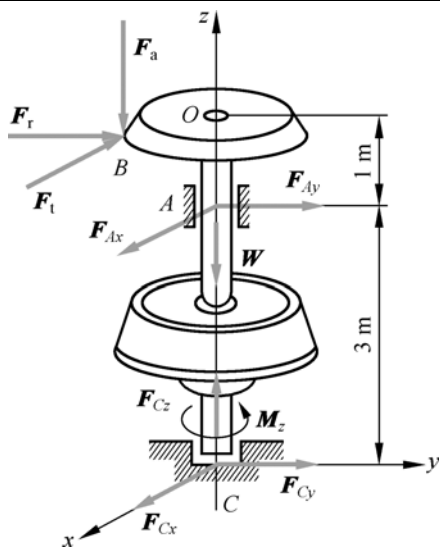
$$F_t = 2000 \text{ N}$$

再由三个力的大小比, 得

$$F_a = 640 \text{ N}, \quad F_r = 340 \text{ N}$$

最后, 应用其他的平衡方程:

$$\begin{aligned} \sum F_z = 0, \quad F_{Cz} - P - F_a &= 0 \\ \sum M_y(F) = 0, \quad 3F_{Ax} - 4F_t &= 0 \end{aligned}$$



例题图 5-12

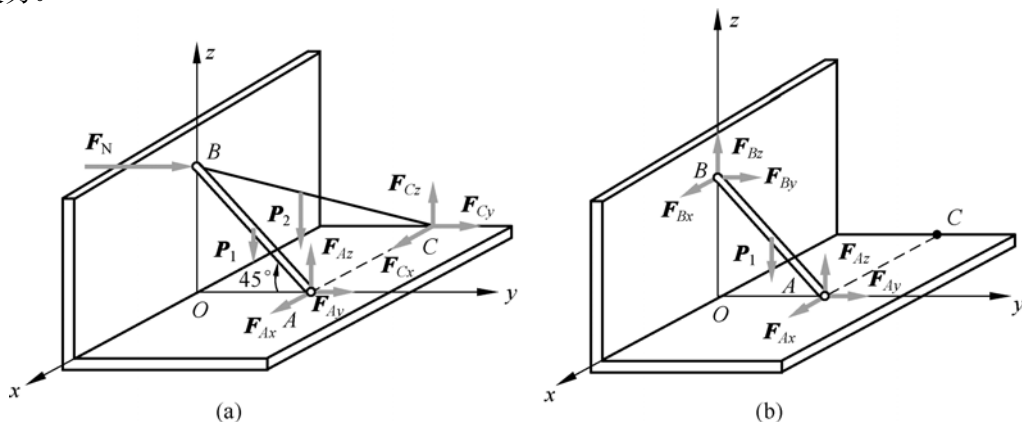
$$\begin{aligned}\sum M_x(F) &= 0, \quad -3F_{Ay} - 4F_r + 0.6F_a = 0 \\ \sum F_y &= 0, \quad F_{Ay} + F_{Cy} + F_r = 0 \\ \sum F_x &= 0, \quad F_{Ax} + F_{Cx} - F_t = 0\end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned}F_{Ay} &= -325 \text{ N}, \quad F_{Cy} = -14.7 \text{ N} \\ F_{Ax} &= 2.67 \text{ kN}, \quad F_{Cx} = -667 \text{ N}, \quad F_{Cz} = 12.6 \text{ kN}\end{aligned}$$

例题 5-13

如例题图 5-13(a)所示, 已知均质杆 AB, BC 分别重为 P_1, P_2 , A, B, C 均为球铰, B 端靠在铅垂光滑的墙上, A, C 端铰连在地板上, $\angle BAC = 90^\circ$ 。求球铰 A, C 的约束力和 B 点墙的法向反力。



例题图 5-13

分析: 若取 ABC 整体为研究对象, 则点 A, C 各有 3 个约束力, 点 B 有 1 个约束力, 共 7 个未知量不能由空间力系的平衡方程求解, 如例题图 5-13(a)所示。所以, 必须将结构分解, 先取其中一个进行平衡分析。

解:

先取 AB 为研究对象, 受力如例题图 5-13(b)所示。以 z 为轴列力矩平衡方程得

$$\sum M_z(F) = 0, \quad -F_{Ax} \cdot OA = 0 \Rightarrow F_{Ax} = 0$$

然后取整体为研究对象, 列基本形式的平衡方程可得

$$\begin{aligned}\sum M_{AC} &= 0, \quad (P_1 + P_2) \frac{AB}{2} \cos 45^\circ - F_N \cdot AB \cdot \sin 45^\circ = 0 \\ \sum F_x &= 0, \quad F_{Ax} + F_{Cx} = 0 \\ \sum M_y &= 0, \quad F_{Cz} \cdot AC - P_2 \frac{1}{2} \cdot AC = 0 \\ \sum F_z &= 0, \quad F_{Az} + F_{Cz} - P_1 - P_2 = 0 \\ \sum M_z &= 0, \quad -(F_{Ax} + F_{Cx}) \cdot OA - F_{Cy} \cdot AC = 0 \\ \sum F_y &= 0, \quad F_{Ay} + F_{Cy} + F_N = 0\end{aligned}$$

$$F_B = 7.777 \text{ kN}$$

代入式(a)，解得

$$F_A = 4.423 \text{ kN}$$

通过以上例题，可总结求解空间任意力系平衡问题的主要步骤如下：

(1) 正确地对所研究的物体进行受力分析。特别是分析清楚约束类型和约束力，所有的力构成怎样的力系（力偶系、汇交力系、任意力系、平行力系）。

(2) 选择适当的坐标系和平衡方程的具体形式（不局限于基本形式），进行求解。其中需要遵循的原则是尽量使一个方程含有一个未知力，避免解联立方程组。为此，选择力矩轴时应尽量使未知力的作用线与该轴平行或者相交，而力投影轴则尽量与未知力的作用线垂直，这样可以减少平衡方程中的未知力数目。

(3) 求解方程。从未知量最少的方程入手。

(4) 分析验证计算结果。若计算结果为正，则未知力的真实方向与假设方向相同，否则相反。可以利用其他形式的平衡方程验证结果的正确性。

5.5 重心

物体所受的重力是一种特殊的平行力系。本节由平行力系的中心引出重心的概念及其计算公式。重心在实际工程中具有重要的意义。

平行力系的中心

以两个平行力为例说明平行力系中心的概念。如图 5-13 所示，设两个同向的平行力 F_1 和 F_2 作用于 A, B 两点， AB 连线与这两个平行力作用线的夹角为 α 。显然， F_1 和 F_2 为一个平面力系，其主矢不为零，所以存在合力 $F = F_1 + F_2$ 。合力作用线位置用合力矩定理确定，假定合力作用线与 AB 连线交于 C ，则 $M_C(F) = M_C(F_1) + M_C(F_2) = 0$ ，由此可得 $\frac{CA}{CB} = \frac{F_2}{F_1}$ 。显然，不管平行力方向 α 如何（即原有力系任意转动），合力作用线总过点 C ，此点称为两平行力的中心。

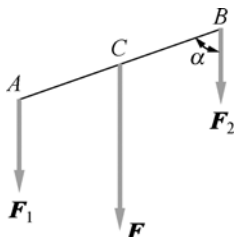


图 5-13 两个平行力的中心

显然，可以把上述概念及方法推广至任意同向的平行力系。设多个同向力组成一个平行力系 (F_1, F_2, \dots, F_n) ，如图 5-14 所示，可以逐次运用上述两平行力合成的方法求得合力 $F_R = \sum F_i$ 和力系的中心 C 。但用这种方法求平行力系的中心是非常麻烦的。在工程实际中，一般用合力矩定理直接求合力作用线的位置。设各力作用点的矢径分别为 r_1, r_2, \dots, r_n ，相应的坐标为

$A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), \dots, A_n(x_n, y_n, z_n)$; 力系中心的矢径为 r_C , 相应的坐标为 $C(x_C, y_C, z_C)$, 则由合力矩定理, 得

$$r_C \times F_R = \sum r_i \times F_i$$

因为力的作用线方向一致, 所以设该方向的单位矢量为 F^0 , 则上式可写为

$$r_C \times F^0 F_R = \sum r_i \times F^0 F_i$$

从而得

$$r_C = \frac{\sum F_i r_i}{\sum F_i} \tag{5-26}$$

将式(5-26)投影到坐标轴上得

$$x_C = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}, \quad y_C = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}, \quad z_C = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i} \tag{5-27}$$

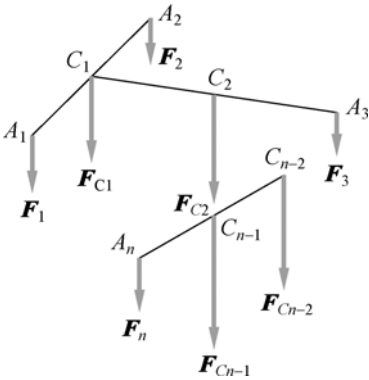


图 5-14 平行力系的中心

重心与形心

作用在一个物体各质点上的重力可看成是一个同向的平行力系, 此平行力系中心就称为物体的**重心** (center of gravity)。若将物体分割成许多微单元, 如图 5-15 所示, 第 i 个微单元的重力为 ΔP_i , 重心坐标为 $(x_i, y_i, z_i) (i=1, 2, 3, \dots)$, 则由式(5-27)可得整个物体的重心坐标的近似公式为

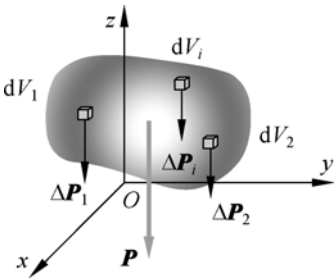


图 5-15 重力和重心

$$x_C = \frac{\sum \Delta P_i x_i}{P}, \quad y_C = \frac{\sum \Delta P_i y_i}{P}, \quad z_C = \frac{\sum \Delta P_i z_i}{P} \quad (5-28)$$

令 $\Delta P_i \rightarrow 0$ ，得物体重心坐标的计算公式为

$$x_C = \frac{\int_V \rho g x dV}{\int_V \rho g dV}, \quad y_C = \frac{\int_V \rho g y dV}{\int_V \rho g dV}, \quad z_C = \frac{\int_V \rho g z dV}{\int_V \rho g dV} \quad (5-29)$$

式中， ρ 为密度。在重力加速度 g 为常量的情况下，式(5-29)变为

$$x_C = \frac{\int_V \rho x dV}{\int_V \rho dV}, \quad y_C = \frac{\int_V \rho y dV}{\int_V \rho dV}, \quad z_C = \frac{\int_V \rho z dV}{\int_V \rho dV} \quad (5-30)$$

该式给出的是物体的质心 (center of mass)。进一步，若物体是均质的，则密度 ρ 对于整个物体是常量，此时质心与密度无关 (重心与比重也无关)，仅决定于物体的几何形状和尺寸，式(5-30)变为

$$x_C = \frac{\int_V x dV}{V}, \quad y_C = \frac{\int_V y dV}{V}, \quad z_C = \frac{\int_V z dV}{V} \quad (5-31)$$

该式给出的是物体的形心 (center of an area)。

值得指出的是，物体的重心、质心和形心是三个相互独立的概念。对于均质物体，它们彼此重合。

工程中常采用薄壳结构，如厂房的顶壳、薄壁容器、飞机机翼等，其厚度与其表面积 S 相比是很小的，如图 5-16(a)所示。若薄壳是均质等厚的，则其重心公式为

$$x_C = \frac{\int_S x dS}{S}, \quad y_C = \frac{\int_S y dS}{S}, \quad z_C = \frac{\int_S z dS}{S} \quad (5-32)$$

这时的重心称为曲面的重心。曲面的重心一般不在曲面上，而是位于曲面外确定的一点。

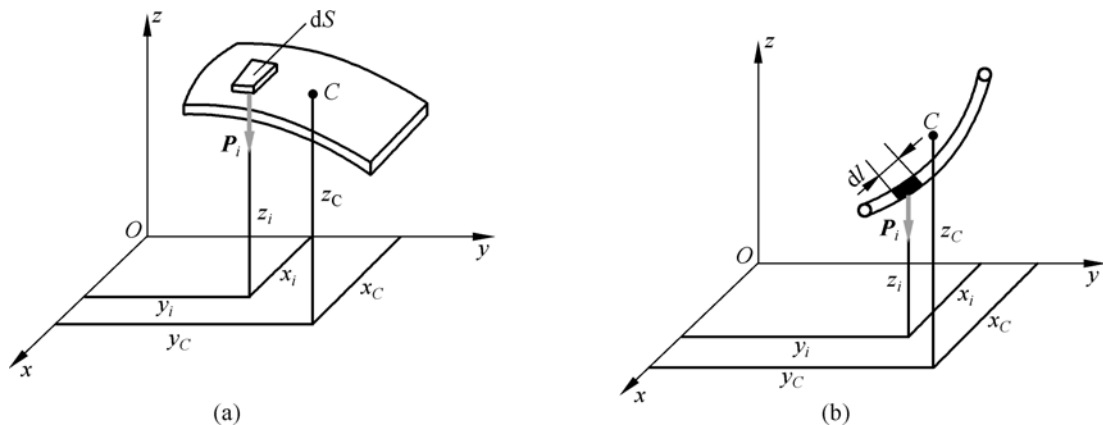


图 5-16 均质等厚薄壳和细长曲杆的重心计算

如果物体是均质等截面的细长曲杆，其截面尺寸与其长度相比很小，如图 5-16(b)所示，则其重心公式为

$$x_C = \frac{\int_l x dl}{l}, \quad y_C = \frac{\int_l y dl}{l}, \quad z_C = \frac{\int_l z dl}{l} \quad (5-33)$$

这时的重心称为曲线的重心，曲线的重心一般也不在曲线上。

若均质物体有对称面，或对称轴，或对称中心，则由上述分析不难看出，该物体的重心必在这个对称面，或对称轴，或对称中心上。例如，正圆锥体或正圆锥面、正棱柱体或正棱柱面的重心都在其轴线上；椭球体或椭圆面的重心在其几何中心上，平行四边形的重心在其对角线的交点上，等等。

工程中多数物体可看成均匀的（或分块均匀的），以下针对均匀物体给出求形心（即重心或质心）的几种方法。

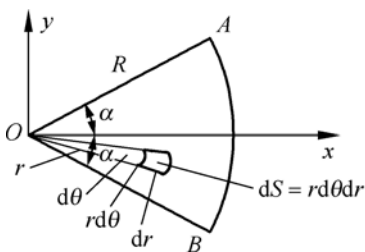
求形心（重心或质心）的几种方法

1. 积分法

直接按式(5-31)积分求得形心（重心或质心）。

例题 5-15

用积分法求例题图 5-15 所示的半径为 R 、圆心角为 2α 的扇形 OAB 的形心，并由此确定半圆面积的形心。



例题图 5-15

解：

建立坐标系如图所示。由于关于 x 轴对称，所以形心必定在 x 轴上，即 $y_C = 0$ ，利用式(5-31)求 x_C 即可，得

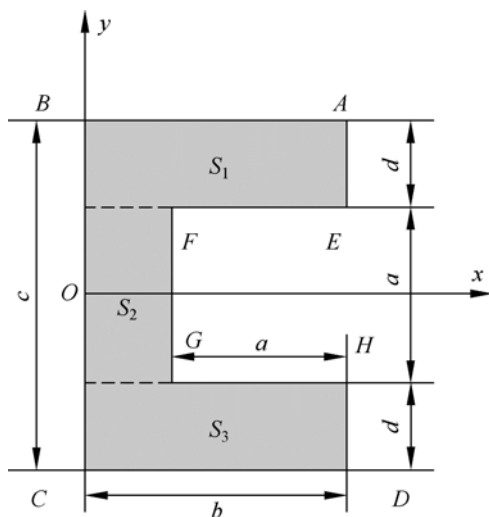
$$x_C = \frac{\int_s x ds}{\int_s ds} = \frac{\int_0^R r^2 dr \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta}{\int_0^R r^2 dr \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{2R}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时，扇形 OAB 为半圆，其重心为 $\left(\frac{4R}{3\pi}, 0\right)$ 。

2. 组合法

例题 5-16

用组合法求例题图 5-16 所示均质面积重心的位置。设 $a = 20 \text{ cm}$ ， $b = 30 \text{ cm}$ ， $c = 40 \text{ cm}$ 。



例题图 5-16

解法 1：分割法

因为 Ox 轴为对称轴，所以重心在该轴上，即 $y_C = 0$ 。以下利用分割法求 x_C 。

将图形化分为三个矩形区域 S_1 , S_2 和 S_3 ，由图上的尺寸可以算出这三块矩形的面积及其重心的 x 坐标如下：

$$S_1 = 300 \text{ cm}^2, \quad x_1 = 15 \text{ cm}$$

$$S_2 = 200 \text{ cm}^2, \quad x_2 = 5 \text{ cm}$$

$$S_3 = 300 \text{ cm}^2, \quad x_3 = 15 \text{ cm}$$

于是，得物体重心的 x 坐标为

$$x_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S_1 + S_2 + S_3} = 12.5 \text{ cm}$$

解法 2：负面积法

例题图 5-16 所示的面积形状也可以看成由矩形 $ABCD$ 挖去矩形 $EFGH$ 而得到，将挖去部分（矩形 $EFGH$ ）的面积取负值，仍可应用与分割法相同的公式来求得重心的坐标。

按照图示的尺寸，可得矩形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 的面积及其重心坐标如下：

$$S_{ABCD} = 1200 \text{ cm}^2, \quad x_1 = 15 \text{ cm}, \quad y_1 = 0$$

$$S_{EFGH} = -400 \text{ cm}^2, \quad x_2 = 20 \text{ cm}, \quad y_2 = 0$$

故原图形面积重心的坐标为

$$x_C = \frac{S_1x_1 + S_2x_2}{S_1 + S_2} = 12.5 \text{ cm}, \quad y_C = 0$$

结果同前。

3. 实验法

工程中一些外形复杂或质量分布不均的物体很难用计算的方法求其重心，此时可借助实验方法测定。下面介绍两种方法。

1) 悬挂法

求一个不规则非均匀薄板的重心，可先将板悬挂于任意一点 A ，如图 5-17(a)所示。根据二力平衡条件，重心必在过悬挂点的铅垂线上，于是可在板上画出此铅垂线，然后再将板悬挂于另一点 B 。同样，可画出另一条过重心的铅垂线。两条铅垂线的交点 C 就是该薄板的重心。

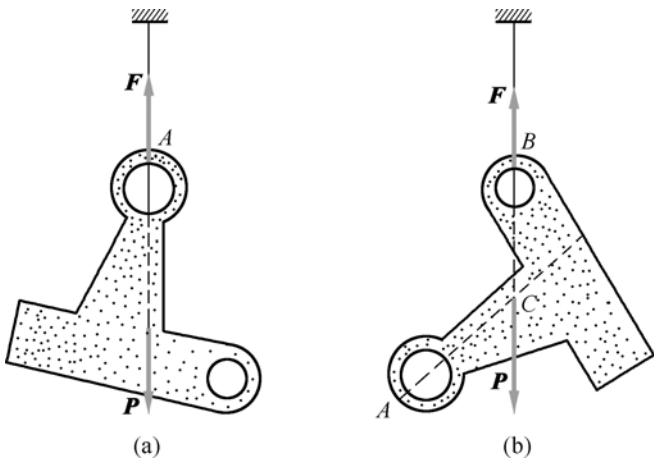


图 5-17 悬挂法

2) 称重法

当物体过重，不易采用悬挂法测量重心时，可以采用称重法。以汽车为例，如图 5-18 所示，首先称量出汽车的重量 P ，测量出前后轮距 l 和车轮半径 r 。设汽车是左右对称的，则重心必在对称面内，我们只需测定重心 C 距地面的高度 z_C 和距后轮的距离 x_C 即可。

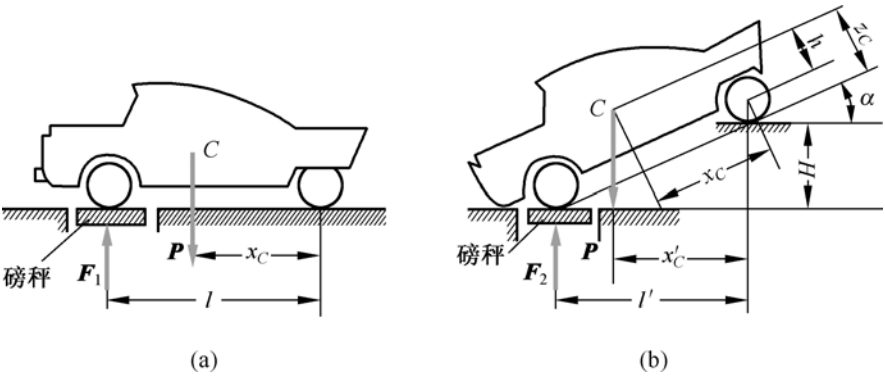


图 5-18 称重法

为了测定 x_C ，将汽车后轮放在地面上，前轮放在磅秤上，车身保持水平，如图 5-18(a)所示，这时磅秤上的读数为 F_1 。因为车身是平衡的，故

$$P \cdot x_C = F_1 \cdot l$$

于是得

$$x_C = \frac{F_1}{P} l \tag{a}$$

欲测定 z_C ，需要将车的后轮抬到任意一个高度 H ，如图 5-18(b)所示，这时磅秤的读数为 F_2 。同上得

$$x'_C = \frac{F_2}{P} l' \tag{b}$$

由图中的几何关系可知：

$$l' = l \cos \alpha, \quad x'_C = x_C \cos \alpha + h \sin \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{H}{l}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{l^2 - H^2}}{l} \tag{c}$$

式中， h 为重心与后轮中心的高度差。将式(a)和式(b)代入式(c)中可求解得到

$$h = \frac{F_2 - F_1}{P} \frac{1}{H} \sqrt{l^2 - H^2}$$

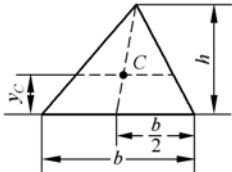
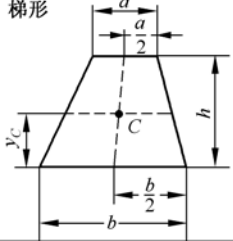
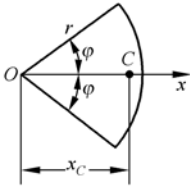
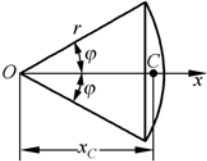
于是有

$$z_C = r + h = r + \frac{F_2 - F_1}{P} \frac{1}{H} \sqrt{l^2 - H^2}$$

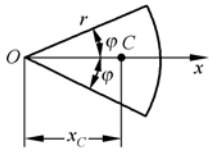
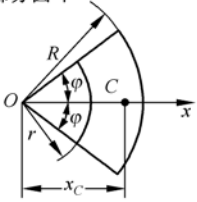
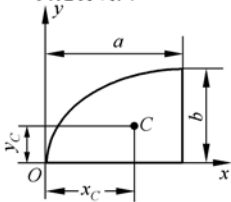
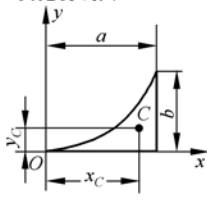
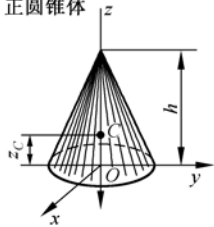
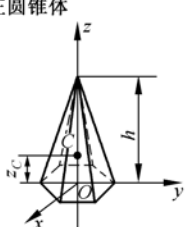
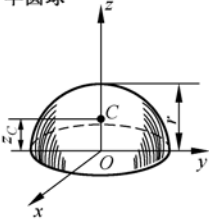
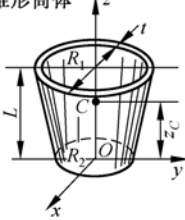
4. 查表法

简单形状物体的形心可从工程手册中查到。工程中常用的型钢（如 T 字钢、角钢、槽钢等）的截面的形心，也可以从型钢表中查到。表 5-3 给出了部分简单图形的形心计算公式。

表 5-3 简单图形的形心计算公式

图形	重心位置	图形	重心位置
<div>三角形</div> 	在中线的交点 $y_C = \frac{1}{3} h$	<div>梯形</div> 	$y_C = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$
<div>圆弧</div> 	$x_C = \frac{r \sin \varphi}{\varphi}$ 对于半圆弧 $x_C = \frac{2r}{\pi}$	<div>弓形</div> 	$x_C = \frac{2}{3} \frac{r^3 \sin^3 \varphi}{A}$ 面积 A $= \frac{r^2 (2\varphi - \sin 2\varphi)}{2}$

续表

图形	重心位置	图形	重心位置
扇形 	$x_C = \frac{2}{3} \frac{r \sin \varphi}{\varphi}$ 对于半圆 $x_C = \frac{4r}{3\pi}$	部分圆环 	$x_C = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{\sin \varphi}{\varphi}$
二次抛物线面 	$x_C = \frac{5}{8} a$ $y_C = \frac{2}{5} b$	二次抛物线面 	$x_C = \frac{3}{4} a$ $y_C = \frac{3}{10} b$
正圆锥体 	$z_C = \frac{1}{4} h$	正圆锥体 	$z_C = \frac{1}{4} h$
半球 	$z_C = \frac{3}{8} r$	锥形筒体 	$z_C = \frac{4R_1 + 2R_2 - 3L}{6(R_1 + R_2 - L)} L$

本章小结

1. 力矩和力偶理论

(1) 力对点的矩

矢量：
$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = M_{Ox}(\mathbf{F})\mathbf{i} + M_{Oy}(\mathbf{F})\mathbf{j} + M_{Oz}(\mathbf{F})\mathbf{k} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

(2) 力对轴的矩

标量：
$$M_x(\mathbf{F}) = yF_z - zF_y, \quad M_y(\mathbf{F}) = zF_x - xF_z, \quad M_z(\mathbf{F}) = xF_y - yF_x$$

(3) 力对点的矩与力对轴的矩之间的关系

$$M_x(\mathbf{F}) = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{i} = M_{Ox}(\mathbf{F})$$

$$M_y(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{j} = M_{Oy}(\boldsymbol{F})$$
$$M_z(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k} = M_{Oz}(\boldsymbol{F})$$

(4) 力偶矩矢

自由矢量：
$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}') = \boldsymbol{r}_{BA} \times \boldsymbol{F}$$

(矩矢相等的力偶等效)

2. 空间力系的简化

(1) 主矢

$$\boldsymbol{F}'_R = \sum \boldsymbol{F}_i = i \sum F_{ix} + j \sum F_{iy} + k \sum F_{iz}$$

(2) 主矩

$$\boldsymbol{M}_O = \sum \boldsymbol{M}_i = i \sum M_{ix} + j \sum M_{iy} + k \sum M_{iz}$$

(3) 空间任意力系的简化结果

主矢	主矩		最后结果	说明
$\boldsymbol{F}'_R = 0$	$\boldsymbol{M}_O = 0$		平衡	
	$\boldsymbol{M}_O \neq 0$		合力偶	主矩与简化中心的位置无关
$\boldsymbol{F}'_R \neq 0$	$\boldsymbol{M}_O = 0$		合力	合力作用线通过简化中心
	$\boldsymbol{M}_O \neq 0$	$\boldsymbol{F}'_R \perp \boldsymbol{M}_O$	合力	合力作用线距原简化中心 O 的距离为 $d = \frac{M_O}{F'_R}$
		$\boldsymbol{F}'_R // \boldsymbol{M}_O$	力螺旋	力螺旋的中心轴通过简化中心
		\boldsymbol{F}'_R 与 \boldsymbol{M}_O 既不垂直也不平行	力螺旋	力螺旋的中心轴距原简化中心 O 的距离为 $d = \frac{M_O \sin \alpha}{F'_R}$

3. 空间力系的平衡

力系	平衡方程	独立方程数
空间力偶系	$\sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0$	3
空间汇交力系	$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$	3
空间平行力系	$\sum F_z = 0, \sum M_x = 0, \sum M_y = 0$	3
空间任意力系	$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$ $\sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0$ (基本形式)	6

注：空间任意力系的平衡方程还有 4 矩式、5 矩式、6 矩式。

4. 物体的重心/质心/形心

重心：
$$x_C = \frac{\int_V \rho g x dV}{\int_V \rho g dV}, y_C = \frac{\int_V \rho g y dV}{\int_V \rho g dV}, z_C = \frac{\int_V \rho g z dV}{\int_V \rho g dV}$$

质心：
$$x_C = \frac{\int_V \rho x dV}{\int_V \rho dV}, y_C = \frac{\int_V \rho y dV}{\int_V \rho dV}, z_C = \frac{\int_V \rho z dV}{\int_V \rho dV}$$

$$\text{形心: } x_C = \frac{\int_V x dV}{V}, y_C = \frac{\int_V y dV}{V}, z_C = \frac{\int_V z dV}{V}$$

对于常重力场下的均匀物体,重心、质心、形心重合。

确定重心的方法: ①积分法; ②组合法(分割法/负面积法);

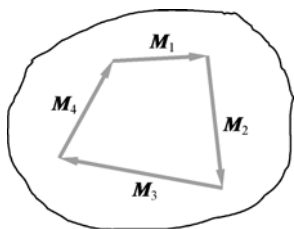
③实验法(悬挂法/称重法); ④查表法。

思考题

5-1 判断下列说法是否正确,并说明原因。

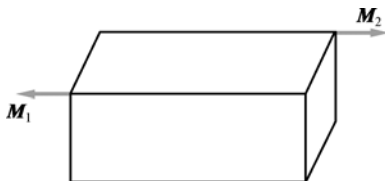
- (1) 空间问题中,力对点的矩矢在任意一轴上的投影等于力对该轴的矩。
- (2) 空间力系的主矢、主矩与原力系等效。
- (3) 空间平行力系简化的最终结果不可能成为力螺旋。
- (4) 有一个空间力系,向不共线的三点 A, B, C 简化所得的主矩相同,则该力系简化的最终结果应该是一个合力偶。
- (5) 若空间任意力系对任意两点的主矩的大小和方向保持不变,则该力系肯定能够简化为一个合力偶。
- (6) 作为空间力系的特例,空间汇交力系不可能简化为合力偶;同样,空间力偶系也不能简化为合力。

5-2 作用在刚体上的四个力偶,若其力偶矩矢都位于同一平面内,则一定是平面力偶系吗? 若各力偶矩矢自行封闭,如思考题图 5-2 所示,则一定是平衡力系吗? 为什么?



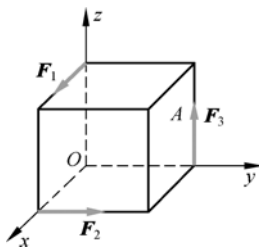
思考题图 5-2

5-3 思考题图 5-3 所示的长方形刚体,仅受两个力偶作用,已知其力偶矩矢满足 $M_1 = -M_2$, 该长方体是否平衡?



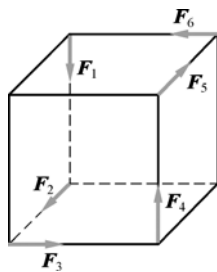
思考题图 5-3

5-4 思考题图 5-4 所示的力系(各力大小相等),沿正方体棱边作用,试问该力系向点 O 简化的结果是什么?



思考题图 5-4

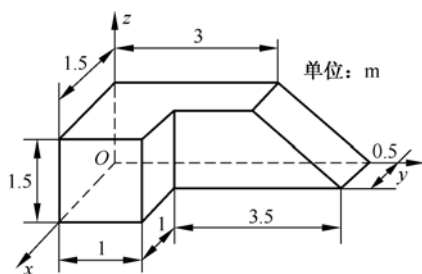
5-5 思考题图 5-5 所示的正立方体的顶角作用着六个大小相等的力,此力系向任意一点简化的结果是什么?



思考题图 5-5

5-6 在空间能否找到两个不同的简化中心,使某力系的主矢和主矩完全相等? 或都不相等? 或一个相等一个不相等?

- 5-7 空间任意力系总可以用两个力来平衡，为什么？
- 5-8 某一个空间任意力系对不共线的三个点的主矩都等于零，问此力系是否一定平衡？
- 5-9 证明空间力系的平衡方程可以写成 4 矩式、5 矩式或 6 矩式。
- 5-10 空间力系中各力的作用线分别汇交于两个固定点，则该力系有几个独立的平衡方程？
- 5-11 试求思考题图 5-10 所示均质混凝土基础的重心位置，尺寸如图所示。



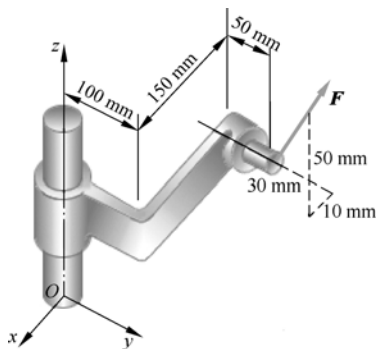
思考题图 5-10

- 5-12 一个均质等截面直杆，若将其弯成各种形状，重心位置是否改变？

习 题

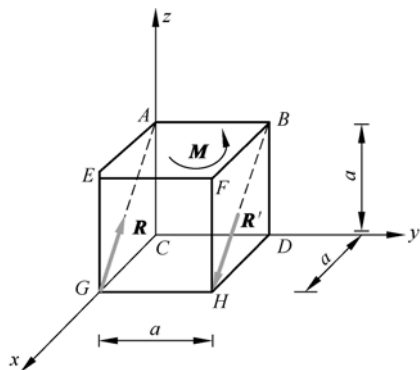
基本题

- 5-1 如习题图 5-1 所示的结构，作用力 $F = 1000 \text{ N}$ ，求其对 z 轴的力矩 M_z 。



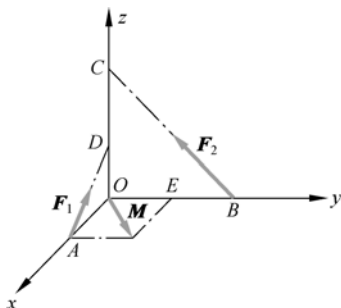
习题图 5-1

- 5-2 在习题图 5-2 所示正方体的表面 $ABFE$ 内作用一个力偶，其矩 $M = 50 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ，方向如图所示；又沿 GA, BH 作用两个力 R, R' ， $R = R' = 50\sqrt{2} \text{ kN}$ ； $a = 1 \text{ m}$ 。试求该力系向点 C 简化的结果。



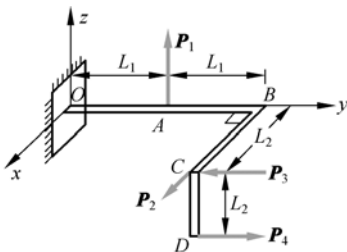
习题图 5-2

- 5-3 一个力系如习题图 5-3 所示，已知： $F_1 = F_2 = F$ ， $M = F \cdot a$ ， $OA = OD = OE = a$ ， $OB = OC = 2a$ 。试求此力系的简化结果。



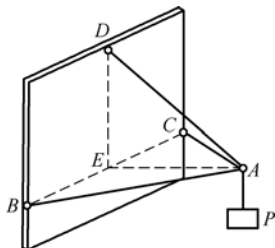
习题图 5-3

- 5-4 如习题图 5-4 所示，曲杆 $OABCD$ 的 OB 段与 y 轴重合， BC 段与 x 轴平行， CD 段与 z 轴平行，已知： $P_1 = 50 \text{ N}$ ， $P_2 = 50 \text{ N}$ ； $P_3 = 100 \text{ N}$ ， $P_4 = 100 \text{ N}$ ， $L_1 = 100 \text{ mm}$ ， $L_2 = 75 \text{ mm}$ 。试求力系向点 B 简化的结果，并进一步求力系所能简化的最简单形式，确定相应的简化中心位置。



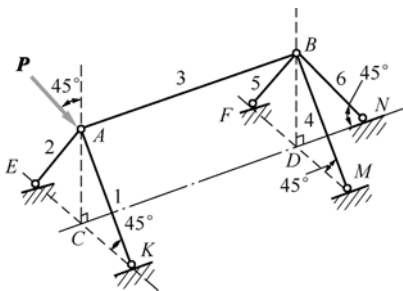
习题图 5-4

- 5-5 如习题图 5-5 所示的结构, 设 $\angle CBA = \angle BCA = 60^\circ$, $\angle EAD = 30^\circ$, 物体 P 的重量为 3 kN , 平面 ABC 是水平的, A 、 B 、 C 各点均为铰接。试求撑杆 AB 和 AC 的内力 F_1 和 F_2 , 及绳索 AD 的拉力 T 。



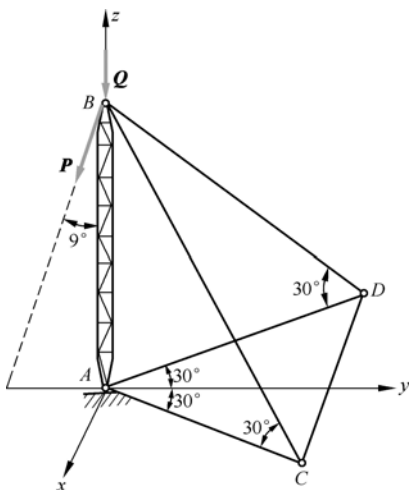
习题图 5-5

- 5-6 如习题图 5-6 所示, 支架由六根杆子铰接组成。三角形 EAK 、 FBM 和 NDB 为等腰三角形, 顶点 A 、 B 和 D 处均为直角, 且 $\triangle EAK \cong \triangle FBM$ 。若在节点 A 上在 $ABCD$ 平面内作用一个力 $P = 20 \text{ kN}$, 求各杆所受的力。

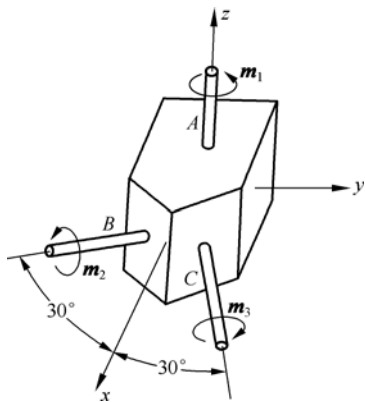


习题图 5-6

- 5-7 如习题图 5-7 所示的桅杆, A 端为球形铰链支座, B 端用风缆 BC 和 BD 系住。已知作用在桅杆 B 端的集中荷载 $P = 80 \text{ kN}$ 和 $Q = 35 \text{ kN}$, 不计桅杆自重。试求风缆 BC 、 BD 的拉力和球形铰链支座 A 的约束力。
- 5-8 如习题图 5-8 所示, 三根转动轴连接在一个齿轮箱上, 转动轴 A 是铅垂的, 而转动轴 B 和 C 是水平的, 在三根轴上各作用一个力偶, 其力偶矩分别为 $m_1 = 600 \text{ N}\cdot\text{m}$, $m_2 = m_3 = 800 \text{ N}\cdot\text{m}$, 方向如图所示。求这三个力偶的合力偶大小和方向。

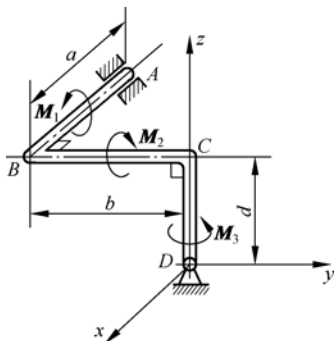


习题图 5-7



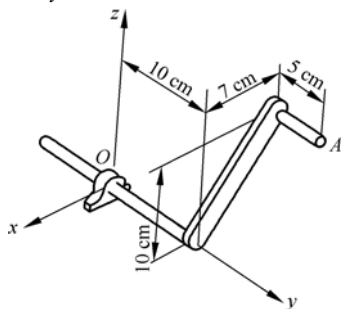
习题图 5-8

- 5-9 如习题图 5-9 所示的曲杆 $ABCD$, $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$, ABC 平面与 BCD 平面相垂直, A 端为一个轴承, D 处为一个球铰。在曲杆的三段上分别作用力偶 M_1 、 M_2 和 M_3 。已知力偶矩 M_2 和 M_3 , $AB = a$, $BC = b$, $CD = d$ 。试求能使曲杆保持平衡的力偶矩 M_1 及各支承处的约束力。



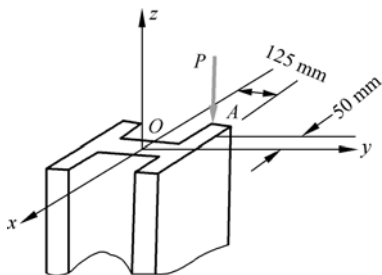
习题图 5-9

- 5-10 如习题图 5-10 所示, 一个力 F 作用在手柄的点 A 上, 该力的大小和指向未知, 其作用线与 xOz 平面平行。已知 $m_x(F) = -3600 \text{ N}\cdot\text{cm}$, $m_z(F) = 2020 \text{ N}\cdot\text{cm}$ 。求该力对 y 轴的矩。



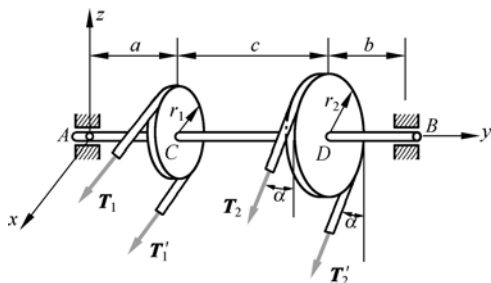
习题图 5-10

- 5-11 如习题图 5-11 所示的柱截面, 在点 A 受力 P 作用。已知 $P = 100 \text{ kN}$, 点 A 的坐标如图所示。求该力对三个坐标轴的矩。



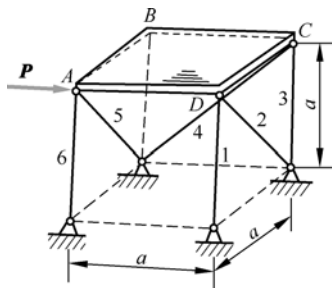
习题图 5-11

- 5-12 水平传动轴上装有两个胶带轮 C 和 D , 若 $r_1 = 20 \text{ cm}$, $r_2 = 25 \text{ cm}$, $a = b = 50 \text{ cm}$, $c = 100 \text{ cm}$, 胶带轮 C 上的胶带是水平的, 上下胶带的拉力各为 T_1 和 T_1' , 且 $T_1' = 2T_1 = 5 \text{ kN}$, 胶带轮 D 上的胶带与铅垂线成 $\alpha = 30^\circ$ 角, 两侧胶带的拉力各为 T_2 和 T_2' , 且 $2T_2' = T_2$ 。当传动轴平衡时, 求胶带拉力 T_2 和 T_2' 以及轴承 A, B 的约束力。



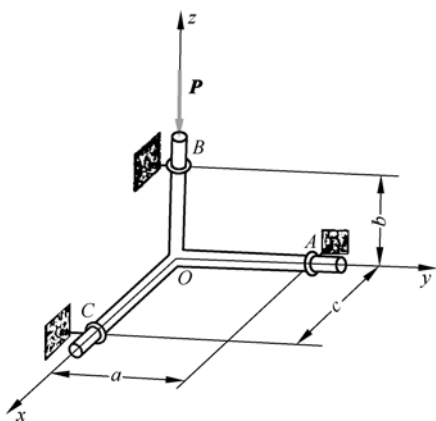
习题图 5-12

- 5-13 如习题图 5-13 所示, 用六根杆支撑正方形板 $ABCD$ 。水平力 P 作用在点 A 沿 AD 方向。不计板的自重, 求各杆的内力。



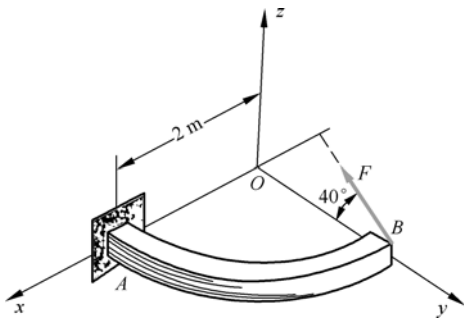
习题图 5-13

- 5-14 三根杆焊在一起, 互成直角, 并由三个光滑圆环支承。求 A, B, C 处的支承力, 已知 $P = 800 \text{ N}$, $a = 150 \text{ mm}$, $c = 125 \text{ mm}$ 。



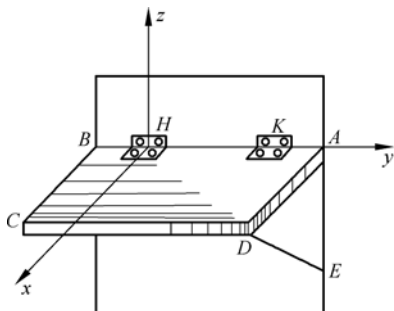
习题图 5-14

- 5-15 如习题图 5-15 所示, 梁 AB 为一个半径 $R = 2 \text{ m}$ 的均质圆弧的四分之一, 其 A 端插入墙内以使圆环维持在水平面 xy 内, 梁重为 450 N , F 力在水平面内, 大小为 900 N , 方向如图所示。求支座 A 的约束力。



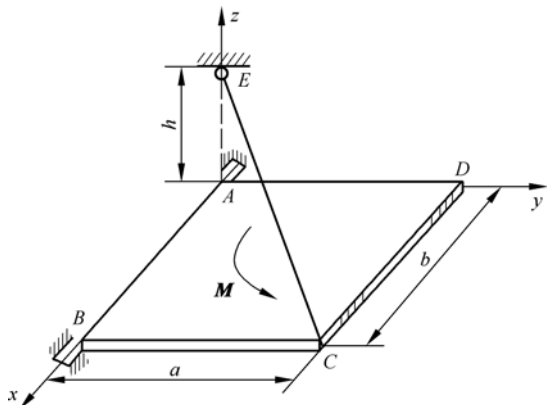
习题图 5-15

5-16 如习题图 5-16 所示,车箱内的搁板 $ABCD$ 可绕 AB 转动,用杆 ED 支撑在水平位置,用铰链 K 和 H 连接在铅垂墙上。搁板连同其上的重物重量为 800 N ,且作用在搁板的中点上,已知 $AB = 150\text{ cm}$, $AD = 60\text{ cm}$, $AK = BH = 25\text{ cm}$,杆长 $ED = 75\text{ cm}$,其重量略去不计,求杆 ED 的内力 F 及蝶形铰链 K 和 H 的约束力。



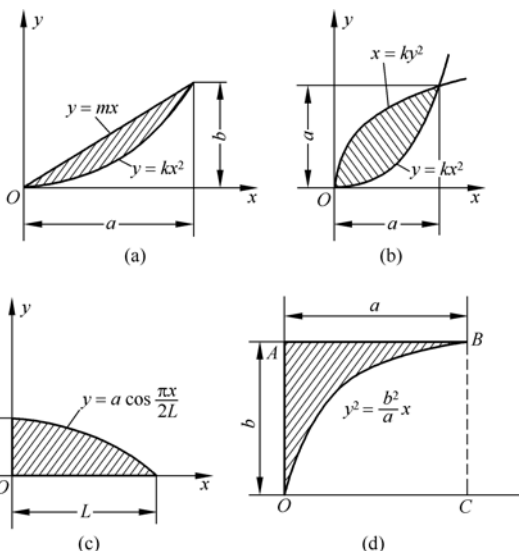
习题图 5-16

5-17 匀质薄板重 $P=1000\text{ N}$,用止推轴承 A 、轴承 B 和绳索 CE 支持在水平面上,如习题图 5-17 所示,薄板可以绕水平轴 AB 转动。在板上作用一个力偶,其力偶矩为 M 。已知 $a = 3\text{ m}$, $b = 4\text{ m}$, $h = 5\text{ m}$, $M = 2000\text{ N}\cdot\text{m}$ 。试求绳子的拉力和 A, B 轴承的约束力。



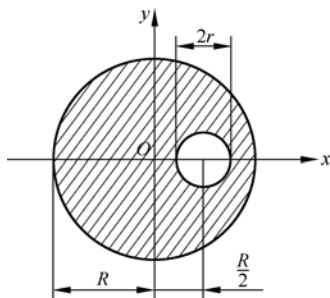
习题图 5-17

5-18 求下列各平面图形的形心坐标。



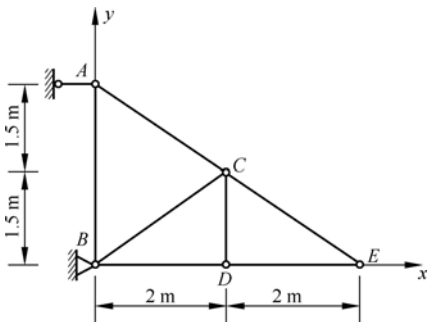
习题图 5-18

5-19 如习题图 5-19 所示,在半径为 R 的圆面积内挖去一个半径为 r 的圆孔,求剩余面积的重心。



习题图 5-19

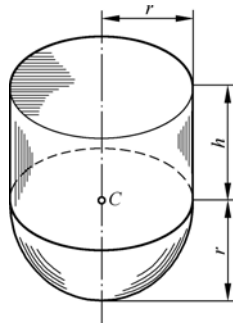
5-20 平面桁架由七根直杆构成,尺寸如习题图 5-20 所示。若各杆单位长度的重量均相等,求该桁架的重心坐标。



习题图 5-20

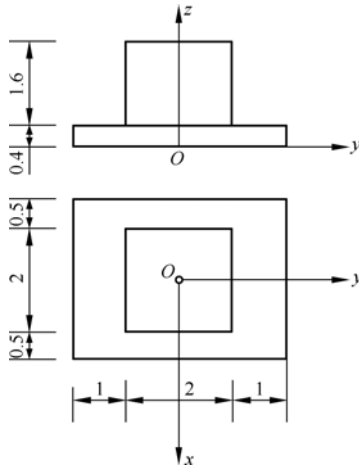
5-21 如习题图 5-21 所示,一个均质物体由半径为 r 的圆柱体和相同半径的半球体组

成。如均质物体的重心位于半球体平面圆的中心点 C ，求圆柱体的高 h 。



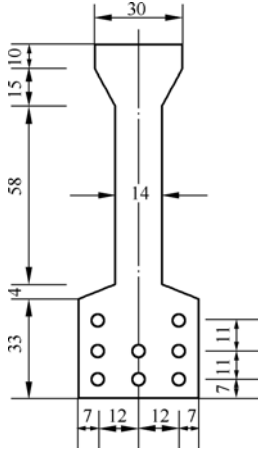
习题图 5-21

5-22 求如习题图 5-22 所示均质材料做成的基础的重心。图中尺寸以 m 计。



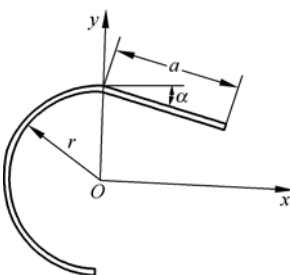
习题图 5-22

5-23 某预应力钢筋混凝土梁的截面如习题图 5-23 所示，钢索孔的直径为 5 cm ，其他尺寸也以 cm 计。求截面重心的坐标。



习题图 5-23

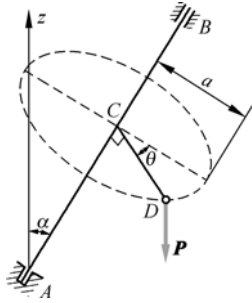
5-24 均质金属细线形状如习题图 5-24 所示。已知其重心位于点 O ，求直线段的长度 a 和角度 α 。



习题图 5-24

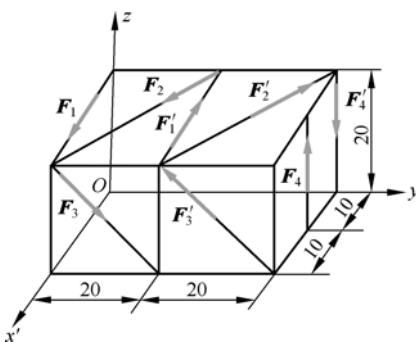
提高题

5-25 如习题图 5-25 所示，轴 AB 与铅垂线成 α 角。悬臂 CD 垂直固定在轴上，长为 a ，并与铅垂面 zAB 成 θ 角。若在点 D 作用铅垂向下的力 P ，求此力对 AB 轴的矩。

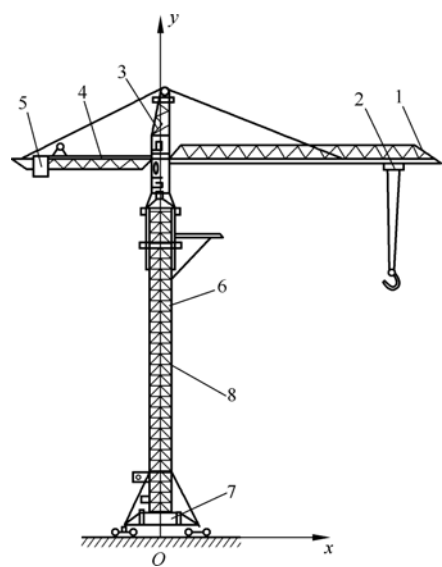


习题图 5-25

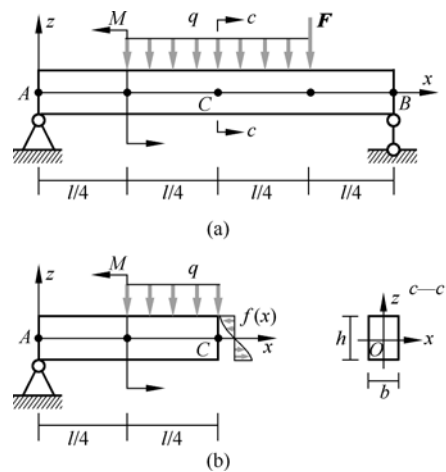
5-26 求如习题图 5-26 所示的 4 个力偶 (F_1, F_1') 、 (F_2, F_2') 、 (F_3, F_3') 、 (F_4, F_4') 合成的结果。已知各力大小均为 500 N ，图中尺寸以 cm 计。



习题图 5-26



习题图 5-36



习题图 5-37

ZT120 起重机各部分的重量和重心坐标

编号	名称	重量/10 kN	重心坐标	
			x	y
1	起重臂	6.62	15.87	44.6
2	起重小车、吊钩	1.20	30.0	42.6
3	塔头	14.96	0.30	44.0
4	平衡臂	8.33	-9.79	44.1
5	平衡重	8.80	-13.5	42.2
6	塔身	16.1	0	22.3
7	底座与压重	49.3	0	1.87
8	其他装置	24.69	0.069	25.2

摩擦 (friction) 是机械运动中的普遍现象, 在某些问题中, 因不起主要作用, 常在初步计算中忽略它的影响而使问题大为简化。但在许多工程技术问题中, 它是不可忽略的重要因素。摩擦通常表现为有利的和有害的两个方面。人靠摩擦行走, 车靠摩擦制动, 螺钉无摩擦将自动松开, 皮带轮无摩擦将无法传动, 这些都是摩擦有利的一面, 没有摩擦或摩擦过小都不行。这时往往要想办法增大摩擦, 如在鞋底和轮胎上设计些花纹, 以增大与路面间的摩擦力。但是, 摩擦还会引起机器发热、零件磨损、降低机械效率和减少使用寿命等, 这些是摩擦有害的一面。减小摩擦的主要方法是变滑动为滚动, 如在机器中尽量使用滚珠轴承; 另外, 还可以变干摩擦为湿摩擦, 如加润滑油。近年来, 已采用磁悬浮等先进技术来减小摩擦。研究摩擦的目的在于掌握摩擦规律, 从而达到兴利除弊的目的。但摩擦是一种极其复杂的物理现象, 本章仅介绍工程中常用的最简单的理论, 重点讲述有摩擦时物体的受力和平衡分析。

按照接触物体之间可能是相对滑动还是相对滚动, 摩擦可分为**滑动摩擦** (sliding friction) 和**滚动摩擦** (rolling friction)。根据物体之间是否有良好的润滑剂, 滑动摩擦又可分为**干摩擦** (dry friction) 和**湿摩擦**。干摩擦是固体表面之间的摩擦, 又叫外摩擦; 湿摩擦是液体内部或液体和固体之间的摩擦, 又叫内摩擦。本章讨论与干摩擦 (静摩擦、滑动摩擦和滚动摩擦) 有关的受力平衡问题。

6.1 静摩擦和滑动摩擦

两个相互接触的物体, 如有相对滑动或滑动的趋势, 这时在接触面间彼此会产生阻碍相对滑动的切向阻力, 称为**滑动摩擦力**。可通过如下实验观察滑动摩擦的规律: 将重为 G 的物体放在表面粗糙的固定水平面上, 这时物体在重力 G 与法向约束力 F_N 作用下处于平衡, 如图 6-1(a) 所示。若给物体一个水平拉力 F_P , 并由零逐渐增大, 则物体将发生相对滑动或有滑动的趋势。现讨论以下几种情形。

静摩擦力

在拉力 F_P 值由零逐渐增大至某一临界值的过程中, 物体虽有向右滑动的趋势但仍保持静止状态, 这说明在接触面上除法向约束力 F_N 外必存在一个阻碍物体滑动的切向阻力 F_s , 如图 6-1(b) 所示。这个力称为**静滑动摩擦力**, 简称**静摩擦力** (static friction)。根据平衡条件可知, 静摩擦力 F 的大小随主动力 F_P 而改变, 其方向与物体滑动趋势的方向相反。此时, $F-F_P$ 的关系如图 6-2 中的斜直线段部分所示。

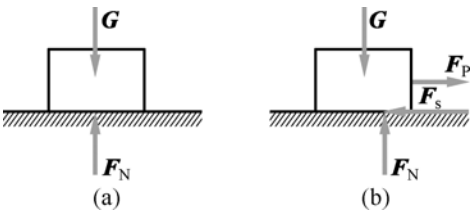


图 6-1 静摩擦力

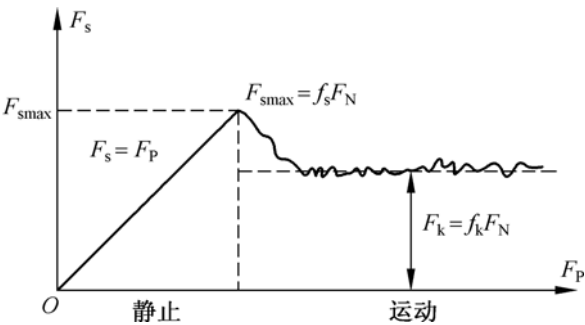


图 6-2 摩擦力随水平拉力的变化

最大静摩擦力

当拉力 F_P 达到某一临界值时，物体处于将要滑动而未滑动的临界状态，即力 F_P 再增大一点，物体即开始滑动。这时，静摩擦力达到最大值，称为最大静滑动摩擦力，简称**最大静摩擦力**，以 F_{smax} 表示，如图 6-2 所示。

大量实验证明，最大静摩擦力的大小与两个物体间的正压力（法向约束力）成正比，即

$$F_{Smax} = f_s F_N \tag{6-1}$$

式(6-1)称为**静摩擦定律** [又称**库仑摩擦定律** (coulomb friction law)]，其中 f_s 称为**静摩擦系数** (coefficient of static friction)。它由两个相互接触物体的质料和表面情况（如粗糙度、干湿度）决定，而与接触面的大小无关。静摩擦系数一般可由实验测定，其数值可在相关手册中查到。

动摩擦力

当静摩擦力已达到最大值时，若主动力 F_P 再继续加大，接触面之间将出现相对滑动。此时，接触物体之间仍作用有阻碍相对滑动的阻力，这种阻力称为滑动摩擦力，简称**动摩擦力** (kinetic friction)，以 F_k 表示。在法向约束力不变的情况下，动摩擦力可能会在较小的范围内波动，但可近似看做常值，如图 6-2 中水平虚线所示。实验表明，动摩擦力的大小与接触体间的正压力成正比，即

$$F_k = f_k F_N \tag{6-2}$$

式中， f_k 是**动摩擦系数** (coefficient of kinetic friction)，它与接触物体的材料和表面情况有关。

动摩擦力与静摩擦力不同，没有变化范围。一般情况下，动摩擦系数小于静摩擦系数，即

$$f_k < f_s \tag{6-3}$$

实际上，动摩擦系数还与接触物体间相对滑动的速度大小有关。对于不同材料的物体，

动摩擦系数随相对滑动的速度变化规律也不同。多数情况下，动摩擦系数随相对滑动速度的增大而稍减小。但当相对滑动速度不大时，动摩擦系数可近似地认为是个常数。在机器中，往往用降低接触表面的粗糙度或加入润滑剂等方法，使动摩擦系数降低，以减小摩擦和磨损。

以上分析说明，考虑滑动摩擦问题时，要分清物体处于静止、临界平衡和滑动三种情况中的哪种状态，然后选用相应的方法进行计算。

摩擦的产生机理非常复杂，现在已形成专门的摩擦学学科。有兴趣的读者请查阅相关的文献。

6.2 摩擦角和自锁现象

摩擦角

当有摩擦时，支承面对平衡物体的约束力包含两个分量：法向力 F_N 和切向力 F_s （即静摩擦力）。这两个分力的矢量和 $F_{RA} = F_N + F_s$ 称为支承面的全约束力，它的作用线与接触面的公法线成一个偏角 α ，如图 6-3(a) 所示。当物块处于平衡的临界状态时，静摩擦力达到最大值，偏角 α 也达到最大值 φ_f ，如图 6-3(b) 所示。该最大值 φ_f 称为摩擦角 (angle of friction)。由图 6-3(b) 可得

$$\tan \varphi_f = \frac{F_{s\max}}{F_N} = \frac{f_s F_N}{F_N} = f_s \quad (6-4)$$

即摩擦角的正切等于静摩擦系数。可见，摩擦角与摩擦系数一样，都是表征材料表面性质的量。

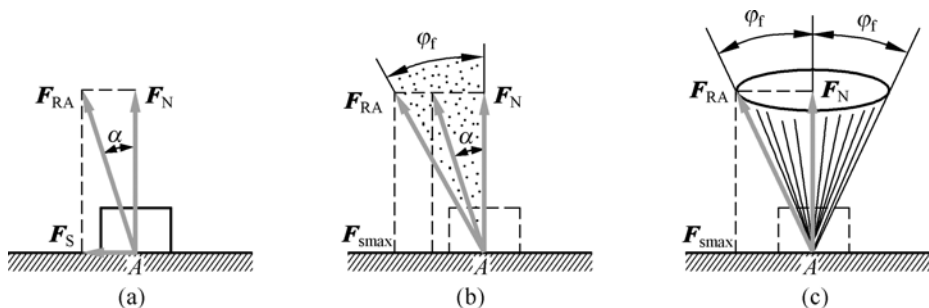


图 6-3 摩擦角和摩擦锥

当物块的滑动趋势方向改变时，全约束力作用线的方位也随之改变；在临界状态下， F_{RA} 的作用线将画出一个以接触点 A 为顶点的锥面，如图 6-3(c) 所示，称为摩擦锥 (cone of friction)。设物块与支撑面间沿任何方向的摩擦系数都相同，即摩擦角都相等，则摩擦锥将是一个顶角为 $2\varphi_f$ 的圆锥。

自锁现象

刚体平衡时，静摩擦力不一定达到最大值，可在零与最大值 $F_{s\max}$ 之间变化，所以全约束力与法线间的夹角 α 也在零与摩擦角 φ_f 之间变化，即

$$0 \leq \alpha < \varphi_f$$

由于静摩擦力不可能超过最大值, 因此全约束力的作用线也不可能处于摩擦角以外, 即全约束力必在摩擦角之内。由此可知:

(1) 如果作用于物块的全部主动力的合力 \mathbf{F}_R 的作用线在摩擦角 φ_f 之内, 则无论这个力多么大, 物块必保持静止。这种现象称为自锁 (self-locking)。因为在这种情况下, 主动力的合力 \mathbf{F}_R 与法线间的夹角 $\theta < \varphi_f$, 因此 \mathbf{F}_R 和全约束力 \mathbf{F}_{RA} 必能满足二力平衡条件, 且 $\theta = \alpha < \varphi_f$ 。

工程实际中常用自锁原理设计一些机构或夹具, 如千斤顶、压榨机、圆锥销等。使它们始终保持在平衡状态下工作。

(2) 如果全部主动力的合力 \mathbf{F}_R 的作用线在摩擦角 φ_f 之外, 则无论这个力多么小, 物块一定会滑动。因为在这种情况下, $\theta > \varphi_f$, 而 $\alpha < \varphi_f$, 所以支撑面的全约束力 \mathbf{F}_{RA} 和主动力的合力 \mathbf{F}_R 不能满足二力平衡条件。利用这个道理, 可以设法避免发生自锁现象。

作为例子, 考察如图 6-4(a)所示螺纹的自锁条件。螺纹可以看成绕在一个圆柱体上的斜面, 如图 6-4(b)所示, 螺纹升角 α 就是斜面的倾角, 如图 6-4(c)所示。这样, 螺纹的自锁条件就转换成斜面的自锁条件, 即物块 A 在铅垂力 \mathbf{P} 的作用下, 不沿斜面下滑的条件。由前面分析可知, 只有当 $\alpha < \varphi_f$ 时, 物块才不能下滑, 所以要使螺纹自锁, 必须使螺纹的升角 α 小于或等于摩擦角 φ_f 。这就是斜面或螺纹的自锁条件。

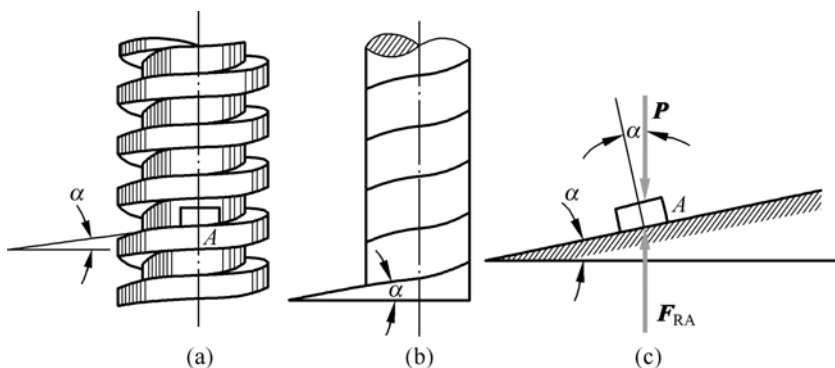


图 6-4 螺纹自锁条件

6.3 考虑滑动摩擦时的平衡问题

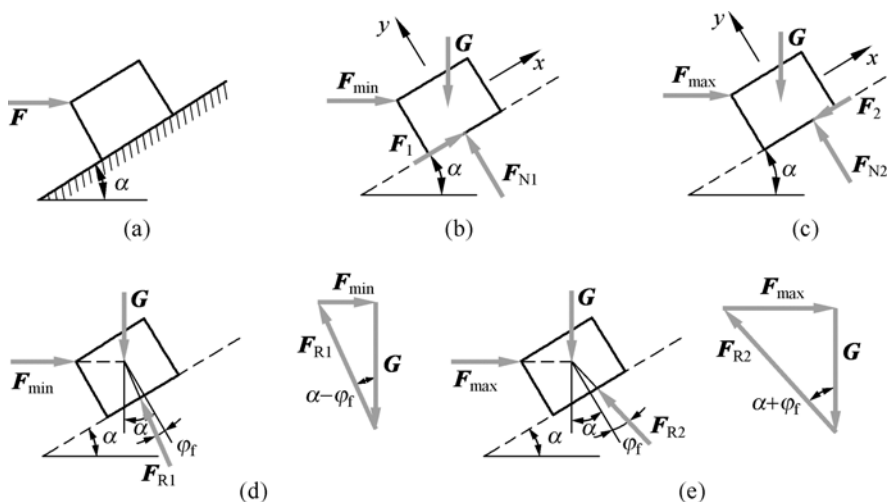
当分析有滑动摩擦的受力平衡问题时, 必须将静摩擦力作为约束力加以考虑, 所列的方程除了平衡方程外应补充摩擦力方程, 即

$$F_s \leq F_{s\max} = f_s F_N \quad (6-5)$$

应当注意的是, 静摩擦力 F_s 的取值是一个范围, 即 $0 \leq F_s \leq F_{s\max}$, 所以在考虑有摩擦的平衡问题时, 其解答的取值也应是一个范围。但为了便于计算, 总是以物体处于最大静摩擦状态 (此状态称为临界状态) 来计算, 然后再考虑解答的取值范围。而且静摩擦力的方向不能任意假定, 要与物体的运动趋势相反。

例题 6-1

如例题图 6-1(a)所示, 一个重为 G 的物体放在倾角为 α 的固定斜面上。已知物块与斜面间的静摩擦系数 f_s (摩擦角为 $\varphi_f = \arctan f_s$), 并且 $f_s < \tan \alpha < 1/f_s$ 。试求维持物块平衡的水平推力 F 的取值范围。



例题图 6-1

分析：根据经验， F 过大，物块将上滑， F 过小，物块将下滑，故 F 的值在一定范围内 ($F_{\min} \leq F \leq F_{\max}$) 才能保持物块静止。 F_{\min} 对应物块处于即将下滑的临界状态， F_{\max} 对应物块处于即将上滑的临界状态。本例可以利用摩擦力方程进行解析求解，也可以利用摩擦角的概念进行几何求解。

解：

解法一：解析法

(1) 求 F_{\min} 。

考虑物块处于即将下滑的临界状态，则静摩擦力 F_1 的方向应沿斜面向上，受力和坐标轴如例题图 6-1(b) 所示。由平衡方程得

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0, & F_{\min} \cos \alpha + F_1 = 0 \\ \sum F_y = 0, & -F_{\min} \sin \alpha - G \cos \alpha + F_{N1} = 0\end{aligned}$$

由静摩擦定律，建立补充方程

$$F_1 = f_s F_{N1} = F_{N1} \tan \varphi_f$$

联立上述各方程，解得

$$F_{\min} = G \frac{\sin \alpha - f_s \cos \alpha}{\cos \alpha + f_s \sin \alpha} = G \tan(\alpha - \varphi_f)$$

(2) 求 F_{\max} 。

考虑物块处于即将上滑的临界状态，则静摩擦力 F_2 的方向应沿斜面向下，受力和坐标轴如例题图 6-1(c) 所示。由平衡方程得

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0, & F_{\max} \cos \alpha - G \sin \alpha - F_2 = 0 \\ \sum F_y = 0, & -F_{\max} \sin \alpha - G \cos \alpha + F_{N2} = 0\end{aligned}$$

由静摩擦定律，建立补充方程

$$F_2 = f_s F_{N2} = F_{N2} \tan \varphi_f$$

联立上述各方程, 解得

$$F_{\max} = G \frac{\sin \alpha + f_s \cos \alpha}{\cos \alpha - f_s \sin \alpha} = G \tan(\alpha + \varphi_f)$$

由以上分析得知, 欲使物块保持平衡, 作用力 F 的取值范围为

$$G \tan(\alpha - \varphi_f) \leq F \leq G \tan(\alpha + \varphi_f)$$

解法二: 几何法

(1) 求 F_{\min} 。

当 $F = F_{\min}$ 时, 物块处于即将下滑的临界平衡状态, 全约束力 F_{R1} 与法线的夹角为摩擦角 φ_f , 物块在 G, F, F_{R1} 三力作用下处于平衡, 如例题图 6-1(d) 所示。作封闭的力三角形, 可得

$$F_{\min} = G \tan(\alpha - \varphi_f)$$

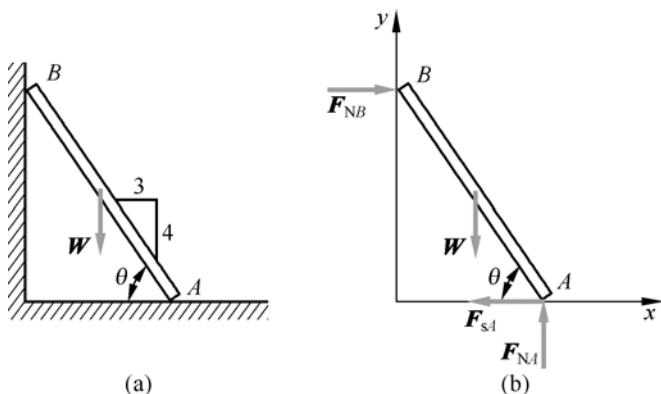
(2) 求 F_{\max} 。

当 $F = F_{\max}$ 时, 物块处于即将上滑的临界平衡状态, 全约束力 F_{R2} 与法线的夹角也是 φ_f , 但 F_{R1} 与 F_{R2} 分布于接触面公法线的两侧, 如例题图 6-1(e) 所示。作封闭的力三角形, 可得

$$F_{\max} = G \tan(\alpha + \varphi_f)$$

例题 6-2

如例题图 6-2(a) 所示, 一个重为 200 N 的梯子 AB 一端靠在铅垂的墙壁上, 另一端搁置在水平地面上, $\theta = \arctan 4/3$ 。假设梯子与墙壁间为光滑约束, 而与地面之间存在摩擦, 静摩擦系数 $f_s = 0.5$ 。问梯子是否处于静止, 还是会滑倒? 此时, 摩擦力的大小为多少?



例题图 6-2

分析: 可先假定物体静止, 求出此时物体所受的约束力和静摩擦力 F_s , 将所求得的 F_s 与可能达到的最大静摩擦力 $F_{s\max}$ 进行比较, 就可确定物体的真实情况。

解:

取梯子为研究对象, 其受力图及坐标轴如例题图 6-2(b) 所示。显然, 梯子 A 端有向右滑动的趋势。由平衡方程得

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0, -F_{sA} + F_{NB} = 0 \\ \sum F_y &= 0, F_{NA} - W = 0 \\ \sum M_A &= 0, W \frac{l}{2} \cos \theta - F_{NB} l \sin \theta = 0\end{aligned}$$

解得

$$F_{NA} = W = 200 \text{ N}, \quad F_{sA} = F_{NB} = \frac{1}{2} W \cdot \cot \theta = 75 \text{ N}$$

根据静摩擦定律, 可能达到的最大静摩擦力为

$$F_{sA \max} = f_s F_{NA} = 0.5 \times 200 \text{ N} = 100 \text{ N}$$

因为 $F_{sA} < F_{sA \max}$, 说明梯子处于静止状态。

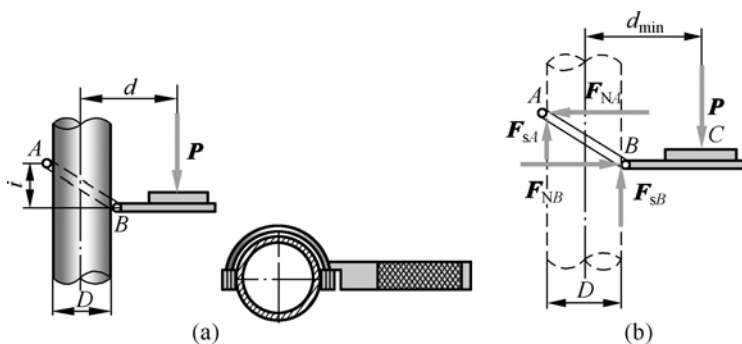
讨论:

(1) 该例题已知作用在物体上的主动力, 求解时需要判断物体是否处于平衡状态。为此可将摩擦力作为一般的约束力来处理, 然后利用平衡方程求出所受的摩擦力, 并通过与最大静摩擦力进行比较, 判断物体所处的状态。

(2) 当静摩擦力的方向不易判断时, 可任意假设其方向。求得结果后, 若其值为负, 说明它的真实方向与假设相反。

例题 6-3

例题图 6-3(a)所示的是攀登电线杆时所采用的脚套钩。已知套钩的尺寸 l , 电线杆的直径 D , 摩擦系数 f_s 。试求套钩不致下滑时脚踏力 P 的作用线与电线杆中心线的距离 d 。



例题图 6-3

解:

取套钩为研究对象, 受力如例题图 6-3(b)所示, 列平衡方程得

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{NA} + F_{NB} = 0 \quad (a)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{As} + F_{Bs} - P = 0 \quad (b)$$

$$\sum M_A = 0, \quad F_{NB} \cdot l + F_{sB} \cdot D - P \left(d + \frac{D}{2} \right) = 0 \quad (c)$$

若使套钩不致下滑，摩擦力需要满足：

$$F_{sA} \leq f_s F_{NA} \quad (d)$$

$$F_{sB} \leq f_s F_{NB} \quad (e)$$

取临界状态，即上式取等号的情况讨论。联立式(d)、式(e)与式(a)、式(b)，得

$$F_{NA} = F_{NB} = \frac{P}{2f_s}$$

将上式和式(e)代入式(c)中，得

$$d = \frac{l}{2f_s}$$

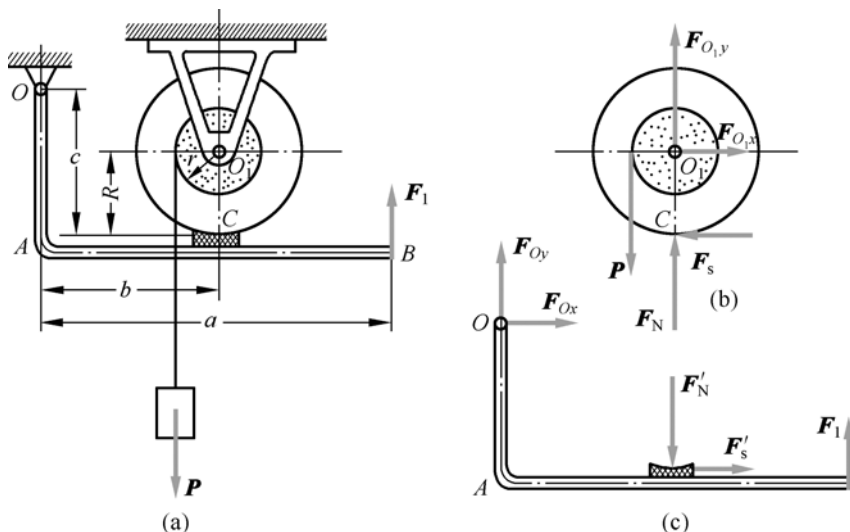
由题意得 $d \geq \frac{l}{2f_s}$ 。

讨论：

本例题也可以借助摩擦角的概念利用几何法求解，请读者自己思考。

例题 6-4

制动器的构造和主要尺寸如例题图 6-4(a)所示。制动块与鼓轮表面间的摩擦系数为 f_s ，试求制动鼓轮转动所必需的力 F_1 。



例题图 6-4

讨论：鼓轮在绳拉力作用下，有逆时针方向转动的趋势，因此闸块除给鼓轮正压力 F_N 外，还有一个向左的摩擦力 F_s 。

解:

先取鼓轮为研究对象, 受力如例题图 6-4(b)所示。其中, 轴心受有轴承约束力 $F_{O,x}$ 和 $F_{O,y}$ 的作用。为了保持鼓轮平衡, 摩擦力 F_s 应满足方程:

$$\Sigma M_{O_1} = 0, \quad Pr - F_s R = 0$$

解得

$$F_s = \frac{r}{R} P \quad (a)$$

再取杠杆 OAB 为研究对象, 其受力如例题图 6-4(c)所示。为了建立 F_1 与 F_N 间的关系, 可列力矩方程

$$\Sigma M_O = 0, \quad F_1 a + F'_s c - F'_N b = 0$$

解得

$$F'_N = \frac{F_1 a + F'_s c}{b} = F_1 \frac{a}{b} + P \frac{rc}{Rb} \quad (b)$$

将式(a)、式(b)代入摩擦力应满足的不等式:

$$F'_s \leq f_s F'_N$$

得

$$P \frac{r}{R} \leq f_s \left(F_1 \frac{a}{b} + P \frac{rc}{Rb} \right)$$

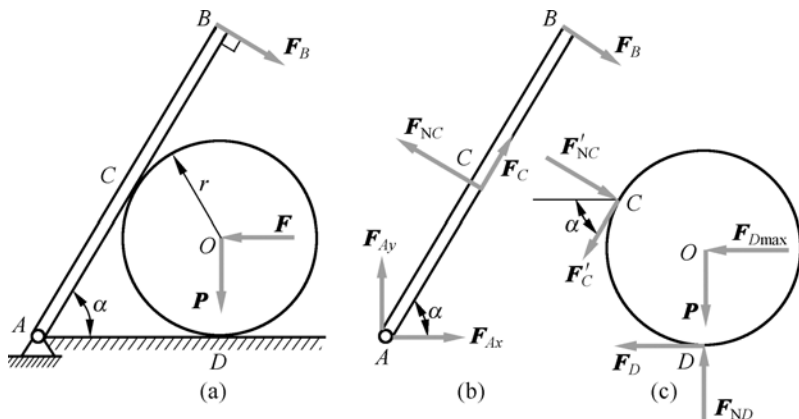
解得

$$F_1 \geq P \frac{r}{R} \left(\frac{b}{f_s a} - \frac{c}{a} \right)$$

例题 6-5

例题图 6-5(a)所示的重为 $P = 100 \text{ N}$ 的均质滚轮夹在无重杆 AB 和水平面之间, 在杆端 B 作用一个垂直于 AB 的力 F_B , 其大小为 $F_B = 50 \text{ N}$ 。 A 为光滑铰链, 轮与杆间的静摩擦系数为 $f_c = 0.4$ 。轮半径为 r , 杆长为 l , 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, $AC = CB$, 如图所示。如果要维持系统平衡, 则

- (1) 若 D 处静摩擦系数 $f_D = 0.3$, 求此时作用于轮心 O 处水平推力 F 的最小值;
- (2) 若 $f_D = 0.15$, 此时 F 的最小值又为多少?



例题图 6-5

分析：由经验可知，若推力 F 太大，轮将向左滚动，使角 α 加大；相反，若推力太小，杆在力的作用下将使轮向右滚动，使角 α 变小。在后者的临界状态下，水平推力 F 即达到维持系统平衡的最小值。另外，轮 C, D 两处都有摩擦，两个摩擦力之中只要有一个达到最大值，系统就会处于即将运动的临界状态，其推力 F 即为最小值。

解：

(1) 先假设 C 处的静摩擦力达到最大值。当推力 F 为最小时，轮有沿水平面向右滚动的趋势，因此轮上点 C 相对于杆有向右上方滑动的趋势，故轮所受的摩擦力 F'_C 沿切线指向左下方，杆所受的摩擦力 F_C ($=-F'_C$) 沿杆指向右上方，如例题图 6-5(c)和(b)所示。设 D 处摩擦力 F_D 未达最大值，假设其方向向左，如例题图 6-5(c)所示。

先以杆 AB 为研究对象，列平衡方程得

$$\sum M_A = 0, F_{NC} \frac{1}{2} - F_B l = 0 \quad (a)$$

C 处到达临界状态，摩擦力满足的补充方程为

$$F_C = F_{C\max} = f_C F_{NC} \quad (b)$$

由式(a)和式(b)解得

$$F_{NC} = 100 \text{ N}, F_C = 40 \text{ N}$$

再以轮为研究对象，列平衡方程得

$$\sum M_O = 0, F'_C r - F_D r = 0 \quad (c)$$

$$\sum F_x = 0, F'_{NC} \sin 60^\circ - F'_C \cos 60^\circ - F - F_D = 0 \quad (d)$$

$$\sum F_y = 0, -F'_{NC} \cos 60^\circ - F'_C \sin 60^\circ - P + F_{ND} = 0 \quad (e)$$

由式(c)得

$$F_D = F'_C = 40 \text{ N}$$

再由式(d)，得最小水平推力为

$$F = 26.6 \text{ N}$$

代入式(e)中，得

$$F_{ND} = 100 + 40 \times \sin 60^\circ + 100 \times \cos 60^\circ = 184.6 \text{ N}$$

当 $f_D = 0.3$ 时， D 处最大静摩擦力为

$$F_{D\max} = f_D F_{ND} = 55.39 \text{ N}$$

由于 $F_D = 40 \text{ N} < F_{D\max}$ ，所以 D 处无滑动，故上述所得 $F = 26.6 \text{ N}$ 确为维持系统平衡的最小水平推力。

(2) 当 $f_D = 0.15$ 时， $F_{D\max} = f_D F_{ND} = 27.7 \text{ N}$ 。前面求得的 $F_D > F_{D\max}$ 不合理，说明此时在 D 处将先达到临界状态，应假设 D 处静摩擦力达到最大值，轮将沿地面滑动。当推力为最小时，杆 AB 与轮的受力图不变，仍如例题图 6-5(b)、(c)所示。与前面不同之处只是将补充方程(b)改为

$$F_D = F_{D\max} = f_D F_{ND} \quad (\text{b'})$$

其他方程不变。由式(c)和式(b)得 $F'_C = F_D = f_D F_{ND}$ ，代入式(e)中，解得

$$F_D = F'_C = \frac{f_D (F'_{NC} \cos 60^\circ + p)}{1 - f_D \sin 60^\circ} = 25.86 \text{ N}$$

代入式(d)中，得最小水平推力为

$$F = F'_{NC} \sin 60^\circ - F_D (1 + \cos 60^\circ) = 47.81 \text{ N}$$

此时，C 处最大静摩擦力仍为 $F_{C\max} = f_D F_{ND} = 40 \text{ N}$ 。由于 $F'_C < F_{C\max}$ ，所以 C 处无滑动。因此，当 $f_D = 0.15$ 时，维持系统平衡的最小推力应为 $F = 47.81 \text{ N}$ 。

讨论：

(1) 求解 $f_D = 0.3$ 的情况，也可以先假设 D 处的静摩擦力达到最大值。如此求得的 F_C 将超过 $F_{C\max}$ ，说明不合理，应假设 C 处先滑动。请读者自行验证。

(2) 请读者求解维持平衡的最大水平推力。

6.4 滚动摩阻的概念

由实践知道，使轮子滚动比使它滑动省力，所以在工程中，为了提高效率，减轻劳动强度，常利用物体的滚动代替物体的滑动。早在殷商时代，我国人民就利用带轮子的车作为运输工具；平时常见当搬运笨重的物体时，在物体下面垫上管子。这些都是以滚代滑的应用实例。

当轮子滚动时，存在什么阻力？它有什么特性？下面通过简单的实例来分析这些问题。

滚动摩阻力偶和滚阻系数

设在水平面上有一个轮子，重量为 P ，半径为 r ，在其中心 O 上作用一个水平力 F ，如图 6-5 所示。当力 F 不大时，轮子仍保持静止。分析轮子的受力情况可知，在轮子与平面接触的点 A 有法向约束力 F_N ，它与重力 P 等值反向；另外，还有静滑动摩擦力 F_s ，阻止轮子滑动，它与 F 等值反向。但如果支撑面的约束力仅有 F_N 和 F_s ，则轮子不可能保持平衡，因为静滑动摩擦力 F_s 与力 F 组成一个力偶，将使轮子发生滚动。但是，实际上当力 F 不大时，轮子是可以平衡的。这是因为轮子和平面实际上并不是刚体，它们在力的作用下都会发生变形，有一个接触面，有接触变形，如图 6-6(a)所示，从而形成阻力，称为滚动摩阻 (rolling resistance)，也称滚动摩擦。

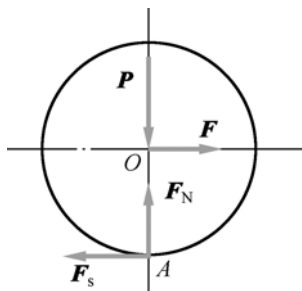


图 6-5 水平面上轮子的滚动

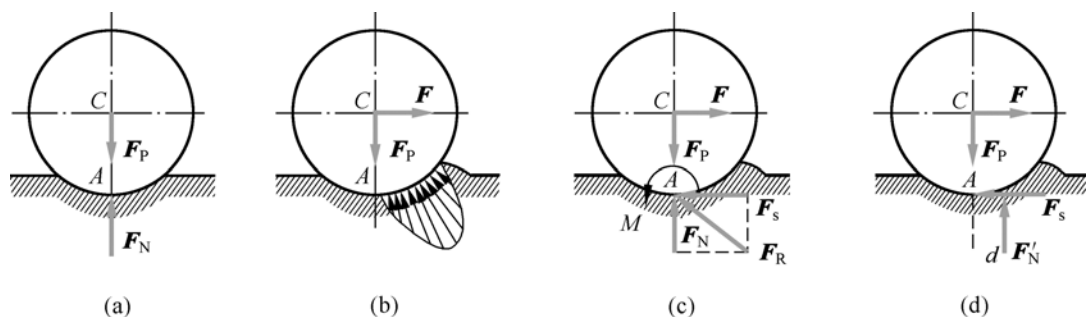


图 6-6 滚动摩阻力偶的形成

在接触面上, 物体受分布力的作用 [如图 6-6(b)所示], 这些力向点 A 简化, 得到一个力 F_R 和一个力偶 M 。其中, 力 F_R 可分解为摩擦力 F_s 和正压力 F_N [如图 6-6(c)所示], 力偶 M 称为滚动摩阻力偶 (简称滚阻力偶), 它与力偶 (F, F_s) 平衡, 它的转向与滚动的趋向相反。

与静滑动摩擦力相似, 滚动摩阻力偶矩 M 随着主动力偶矩的增加而增大, 当力 F 增加到某个值时, 轮子处于将滚还未滚的临界平衡状态, 这时, 滚动摩阻力偶矩达到最大值, 称为最大滚动摩阻力偶矩, 用 M_{\max} 表示。若力 F 再增大一点, 轮子就会滚动。在滚动过程中, 滚动摩阻力偶矩近似等于 M_{\max} 。

由此可知, 滚动摩阻力偶矩 M 的大小介于零与最大值之间, 即

$$0 \leq M \leq M_{\max}$$

实验证明, 最大滚动摩阻力偶矩 M_{\max} 与轮子半径无关, 而与支承面的正压力 (法向约束力) F_N 的大小成正比, 即

$$M_{\max} = \delta F_N \quad (6-6)$$

这就是滚动摩阻定律, 其中 δ 是比例常数, 称为滚动摩阻系数 (coefficient of rolling resistance), 具有长度的量纲, 单位一般用 mm。滚动摩阻系数由实验测定, 它与轮子和支承面的材料硬度和湿度等有关, 与轮子的半径无关, 其值可在相关的手册中查到。

滚阻系数的物理意义

轮子在即将滚动的临界平衡状态时, 根据力的平移定理, 可将其中的法向约束力 F_N 与最大滚动摩阻力偶 M_{\max} 合成为一个力 F'_N , 且 $F'_N = F_N$, 如图 6-6(d)所示。力 F'_N 的作用线距中心线的距离 d 为

$$d = \frac{M_{\max}}{F_N}$$

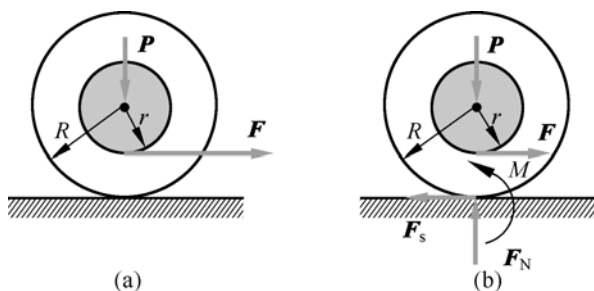
于是

$$\delta = d$$

因而, 滚动摩阻系数 δ 可看成, 在即将滚动时法向反力 F'_N 离中心线的最远距离, 也就是最大滚阻力偶 (F'_N, F_P) 的力臂, 故具有长度的量纲。

例题 6-6

如例题图 6-6(a)所示, 一个半径为 R 、重为 P 的轮静止在水平面上, 在轮上半径为 r 的轴上缠有细绳, 绳端受一个拉力 F 作用。设轮与地面的静摩擦系数为 f_s , 滚动摩阻系数为 δ , 求只滚不滑时轴半径所应满足的条件。



例题图 6-6

解:

以轮子为研究对象, 受力如例题图 6-6(b)所示, 其中 M 为滚动摩阻力偶, F_s 为摩擦力。由平衡方程 $\sum M_A = 0$, 可以求得使轮子滚动所需的拉力为

$$F_{\text{滚}} = \frac{M_{\text{max}}}{R-r} = \frac{\delta F_N}{R-r} = \frac{\delta}{R-r} P$$

由平衡方程 $\sum F_x = 0$ 可以求得

$$F_{\text{滑}} = F_{s\text{max}} = f_s F_N = f_s P$$

欲使轮子只滚不滑, 应有 $F_{\text{滚}} < F_{\text{滑}}$ 。于是有

$$R-r > \frac{\delta}{f_s}$$

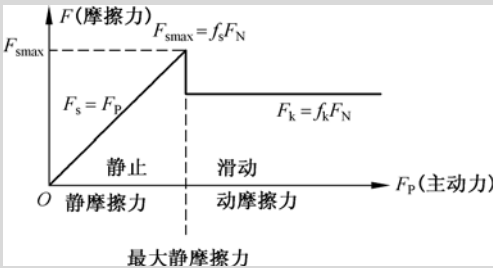
讨论:

当 $r=0$ 时, 因为在一般情况下, 有 $\delta \ll R$, 所以上式很容易满足。也就是说, 通常滚动摩阻系数较小, 因此使轮子滚动比滑动省力得多。正因为如此, 在大多数情况下, 滚动摩阻是可以忽略不计的。

本章小结

1. 摩擦力的特点

- (1) 方向: 摩擦力的方向与两个物体相对滑动的趋势或相对滑动的方向相反。
- (2) 大小: 摩擦力的大小随主动力的变化而变化, 如下图所示 (库仑摩擦定律)。



2. 摩擦角和自锁

(1) 摩擦角： $\tan \varphi_f = f_s$ 。

(2) 自锁：当主动力合力的作用线在摩擦角的范围以内时，无论该合力的大小如何，物体总处于平衡状态。

3. 滚动摩擦

(1) 滚动摩阻力偶矩： $0 \leq M \leq M_{\max}$ 。

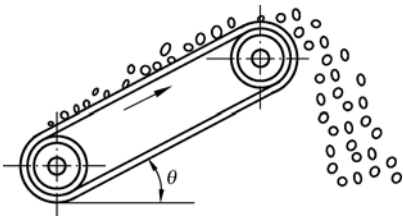
(2) 滚动摩阻定律： $M_{\max} = \delta F_N$ 。

思考题

6-1 判断下列说法是否正确，错误的请指出原因。

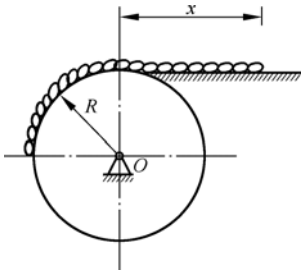
- (1) 摩擦力属于未知的约束力，它的大小、方向完全可以由平衡方程确定。
- (2) 摩擦力作为未知的约束力，它的方向和其他类型的约束力一样可任意假定，所定方向是否正确，可由数值正负判定。
- (3) 临界平衡状态的摩擦力，其大小和方向已经确定，因此它的指向不能任意假定。
- (4) 当一个物体上有多处与周围物体接触时，所有接触面上的摩擦力同时达到临界状态。
- (5) 只要接触面间有正压力存在，就必然会产生滑动摩擦力。摩擦角是指全反力与支承面法线的夹角。
- (6) 若作用在物体上主动力合力的作用线落在摩擦锥以内，则无论主动力的合力有多大，物体总能保持平衡。

6-2 欲使思考题图 6-2 所示的皮带输送机正常工作，它的最大倾角应为多少？



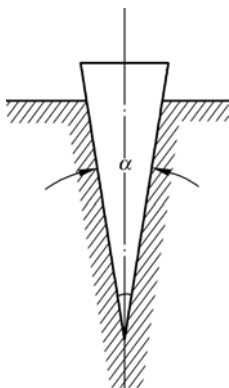
思考题图 6-2

6-3 一条均质链条一端放在平台上，另一端置于半径为 R 的滑轮上，滑轮可绕通过点 O 的水平光滑轴转动。若链条与平台间的静滑动摩擦系数为 f ，链条与滑轮间光滑接触，则平衡时链条在平台上的最小长度 x 应为多少？



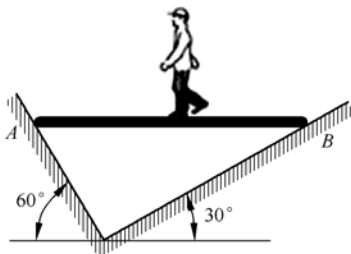
思考题图 6-3

- 6-4 为什么传动螺纹多用方牙螺纹(如丝杠)? 而锁紧螺纹多用三角螺纹(如螺钉)?
- 6-5 如思考题图 6-5 所示, 用钢楔劈物, 接触面间的摩擦角为 φ 。劈入后欲使楔不滑出, 问钢楔两个平面间的夹角 α 应该多大? 楔重不计。



思考题图 6-5

- 6-6 水平梯子放在直角 V 形槽内, 如思考题图 6-6 所示。略去梯子重量, 梯子与两个槽面间的摩擦角均为 φ 。若人在梯子上走动, 试分析人的活动应限制在什么范围内才不会使梯子滑动?

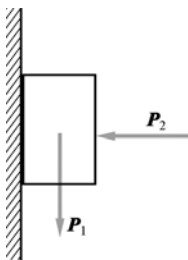


思考题图 6-6

习 题

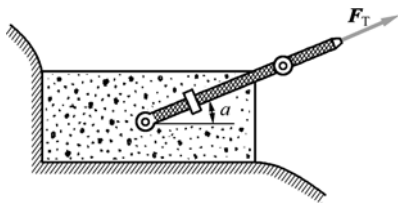
基本题

- 6-1 如习题图 6-1 所示, 物块质量为 10 kg , 用水平力 $P_2 = 490\text{ N}$ 将它压在铅垂墙上, 物体与墙的静摩擦系数 $f = 0.3$, 问摩擦力是多少?



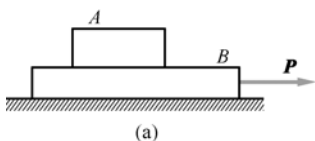
习题图 6-1

- 6-2 如习题图 6-2 所示, 铁索桥的铁索末端固定于混凝土基础中, 设混凝土块重 40 kN , 与岩石间的静摩擦系数为 $f_s = 0.6$, 铁索与水平线成 $\alpha = 20^\circ$ 的角, 求混凝土块开始滑动时, 拉力 F_T 的大小。

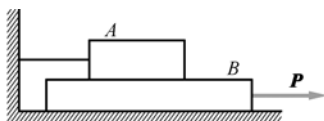


习题图 6-2

- 6-3 两个物块 A 和 B 相叠放在水平面上, 如习题图 6-3(a)所示。已知块 A 重 500 kN , 块 B 重 200 kN 。块 A 和块 B 间的静摩擦系数为 $f_1 = 0.25$, 块 B 与水平面间的静摩擦系数 $f_2 = 0.20$ 。求拉动块 B 的最小力 P 的大小。若块 A 被一绳拉住, 则最小力 P 的值应为多少?



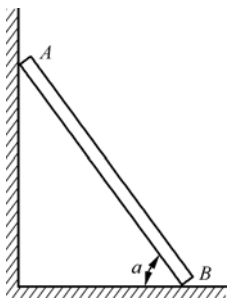
(a)



(b)

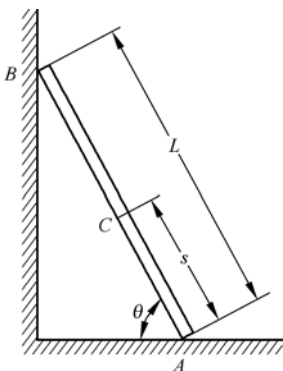
习题图 6-3

- 6-4 如习题图 6-4 所示, 一个均质梯子 AB , 重为 W , 靠在光滑的墙上, 并搁置在不光滑的水平地板上, 点 B 处的静摩擦系数为 f_s 。问梯子与地板的夹角 α 为多少时, 重为 P 的人方能沿梯子爬到顶端?



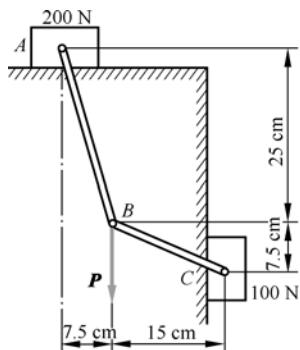
习题图 6-4

- 6-5 如习题图 6-5 所示, 质量为 20 kg 的梯子靠在墙上, 梯子长为 L , 与水平面的夹角 $\theta = 60^\circ$, 各接触面间的摩擦系数均为 0.25 。设梯子的重心在中点。有一个质量为 65 kg 的人沿梯子上爬, 求: (1) 人能达到的最高点 C 到点 A 的距离 s ; (2) 若人要沿着梯子爬到最顶端 B , 则 θ 角应该在什么范围内?



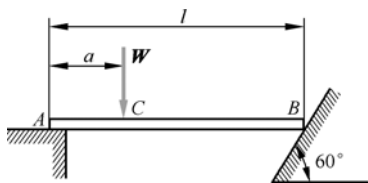
习题图 6-5

- 6-6 直杆 AB 和 BC 用光滑销钉连接, 并在 A 和 C 端分别与重块 A 和 C 相连, 如习题图 6-6 所示。已知 A 和 C 处的静摩擦系数均为 $f_s = 0.25$, 且两个重块均不滑动。问作用于铰 B 处的力 P 的最小值是多少?



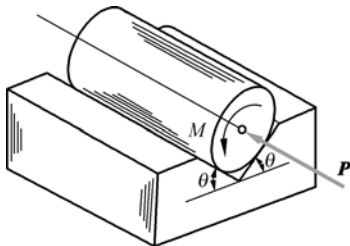
习题图 6-6

- 6-7 如习题图 6-7 所示, 杆 AB 的一端 A 搁在水平面上, 另一端 B 靠在斜面上。已知两端的静摩擦系数均为 $f_s = 0.25$ 。不计杆重, 根据平衡条件, 求荷载 W 的作用点 C 离 A 端的最大距离 a 。



习题图 6-7

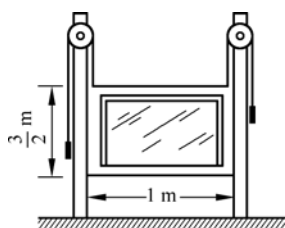
- 6-8 如习题图 6-8 所示, 重为 W 的圆柱体放在 V 形槽内。假设圆柱体与 V 形槽面间的摩擦角 $\varphi_m < \theta$, 圆柱体半径为 R , 求: (1) 使圆柱体滑动的轴向力 P 的最小值; (2) 作用在圆柱体截面使它转动的力偶矩 M 的最小值。



习题图 6-8

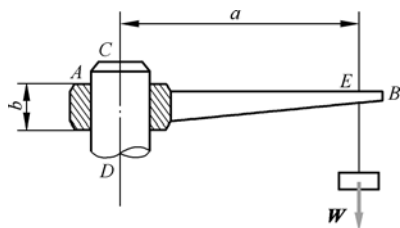
- 6-9 如习题图 6-9 所示长方形的活动窗子, 重为 W , 可以在导槽内上下移动, 窗子原来用两根软绳吊住, 软绳绕过滑轮后挂有重物, 重物的重量为窗子的一半。当一边的绳子突然被拉断时, 问窗子与导槽间需要

有多大的静摩擦系数，窗子才不致下滑。
设窗子与导槽间的间隙可以忽略不计。



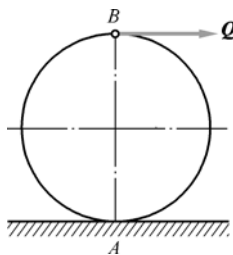
习题图 6-9

- 6-10 如习题图 6-10 所示，在水平杆 AB 的左端有一孔，杆以此孔套在铅垂圆柱 CD 上；圆筒的长度 $b = 2\text{ cm}$ ；在杆上点 E 处挂一个重物 W ，点 E 到圆柱轴线的距离为 a 。杆 AB 的重量忽略不计。已知杆与柱间的静摩擦系数 $f_s = 0.1$ ，若在重物 W 的作用下，杆仍能处于平衡，问距离 a 应等于多少？



习题图 6-10

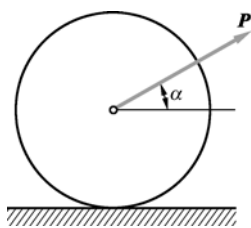
- 6-11 如习题图 6-11 所示，半径为 R 的轮，在其铅垂直径 AB 的上端点 B 作用水平力 Q 。轮与水平面间的滚动摩擦系数为 δ 。问轮与水平面间的滑动摩擦系数 f_s 需要满足什么条件时，轮只滚不滑？



习题图 6-11

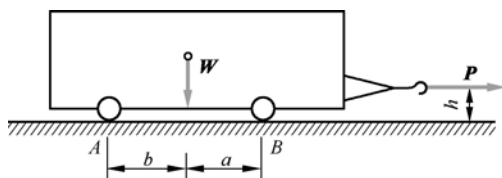
- 6-12 如习题图 6-12 所示，圆柱直径为 60 cm ，重为 3 kN ，由于力 P 的作用而沿水平方向匀速滚动。已知圆柱与水平面的滚动摩

擦系数 $\delta = 0.5\text{ cm}$ ；力 P 与水平面的夹角 $\alpha = 30^\circ$ 。求力 P 的大小。



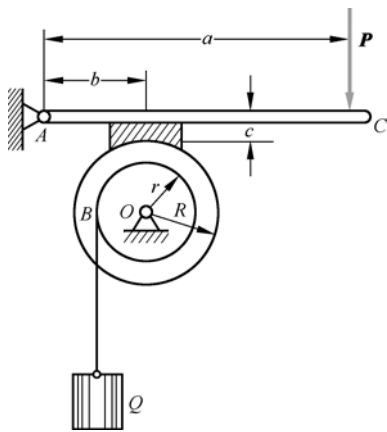
习题图 6-12

- 6-13 如习题图 6-13 所示的拖车总重为 $W = 20\text{ kN}$ ，以匀速沿水平路面行驶。设车轮的半径 $r = 40\text{ cm}$ ，轮胎与路面的滚动摩擦系数 $\delta = 0.20\text{ cm}$ ， $a = 150\text{ cm}$ ， $b = 300\text{ cm}$ ， $h = 50\text{ cm}$ 。求拖车所需的牵引力 P 的大小。



习题图 6-13

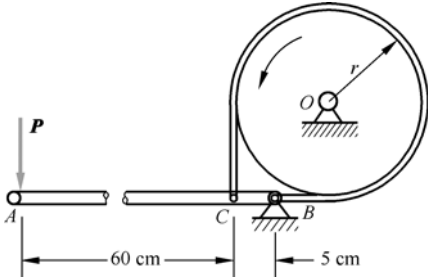
- 6-14 如习题图 6-14 所示的制动装置。已知圆轮 B 与制动块间的摩擦系数为 f ，载荷重为 Q ，各部分尺寸如图所示。求制动力 P 最小应等于多少才能制止重物下落。



习题图 6-14

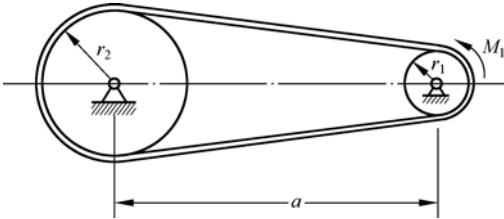
- 6-15 习题图 6-15 所示的是一个带闸。力 $P = 490\text{ N}$ ，闸带与闸轮间的接触角 $\alpha = \frac{3}{2}\pi\text{ rad}$ ，闸轮半径 $r = 25\text{ cm}$ ，摩擦系数 $f =$

0.2。若闸轮做逆时针旋转，试求闸带两端的拉力及制动力矩。



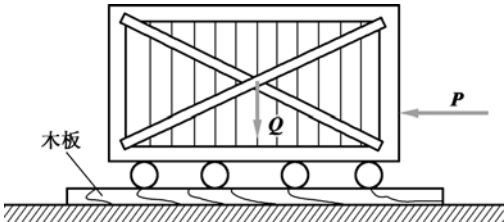
习题图 6-15

6-16 在习题图 6-16 所示的平胶带传动中，主动轮半径 $r_1 = 60 \text{ mm}$ ，作用的力矩 $M_1 = 100 \text{ N}\cdot\text{m}$ ，从动轮半径 $r_2 = 150 \text{ mm}$ ，两轮中心间的距离 $a = 800 \text{ mm}$ ，胶带与轮间的摩擦系数 $f = 0.3$ 。求胶带紧边和松边的拉力。



习题图 6-16

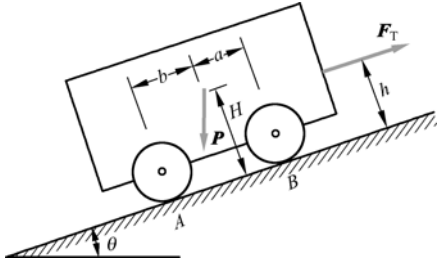
6-17 如习题图 6-17 所示，为了在松软的地面上移动一个质量为 200 kg 的木箱，先在地面铺上木板，然后再在木箱与木板间放进钢管滚杆。若钢管直径 $d = 5 \text{ cm}$ ，钢管与木板和木箱间的滚动摩阻系数为 0.25 cm ，试求推动木箱所需的水平力 P 的大小。若不用滚杆而使木箱直接在木板上移动，求所需水平力 P 的大小，设木箱与木板间的摩擦系数为 0.4 。



习题图 6-17

6-18 习题图 6-18 所示的总重为 P 的拖车，以匀速爬上倾角为 θ 的斜坡。设车轮半径为

r ，轮胎与地面间的滚动摩阻系数为 δ ，略去车轴与轴承间的摩擦。求拖车所需牵引力 F_T 的大小，设 F_T 与斜面平行。



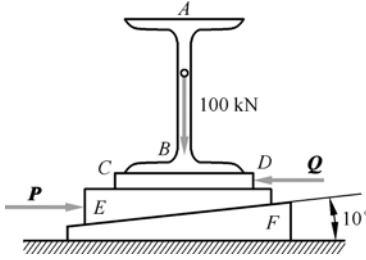
习题图 6-18

提高题

6-19 如习题图 6-19 所示，用钢楔块 E 和 F 来调整钢地板梁 AB 的高度，钢垫板 CD 焊在梁的下翼缘。作用在梁上的竖向荷载为 100 kN 。已知钢接触面的静摩擦系数 $f = 0.30$ ；钢与基础间的静摩擦系数 $f_1 = 0.60$ 。若垫板的水平位移被力 Q 所阻止，求：

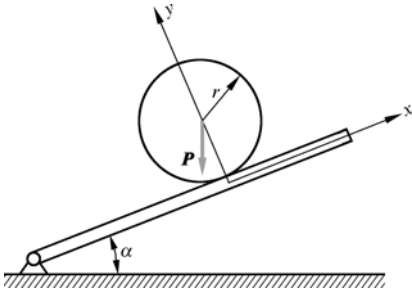
(1) 使梁升起所需要的力 P 的最小值。

(2) 与此相应的力 Q 的大小。



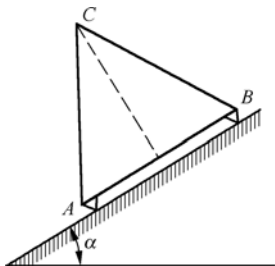
习题图 6-19

6-20 习题图 6-20 所示的半径为 r 、重为 P 的圆柱体，放在一个倾角可以改变的斜面上。已知接触面间静摩擦系数为 f_s ，滚动摩阻系数为 δ 。求此圆柱平衡时斜面倾角 α 的范围。



习题图 6-20

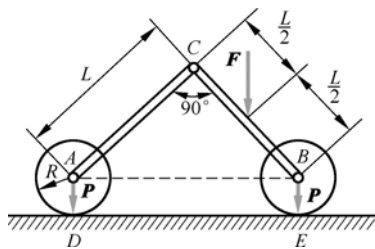
- 6-21 如习题图 6-21 所示, 在粗糙的斜面上放一个棱柱体, A, B 为支点。若 $AB = BC = AC$, A 和 B 与斜面间的静摩擦系数分别为 f_{s1} 和 f_{s2} , 试求物体平衡时斜面与水平面形成的最大倾角 α 。



习题图 6-21

- 6-22 如习题图 6-22 所示的机构中, 两轮半径 $R = 10 \text{ cm}$, 各重 $P = 9 \text{ N}$, 杆 AC 和 BC 的重量不计。已知轮与地面间静摩擦系数 $f_s = 0.2$, 滚动摩阻系数 $\delta = 0.1 \text{ cm}$ 。在杆 BC 中点加一个垂直力 F , 试求:

- (1) 平衡时 F 的最大值 F_{\max} ;
- (2) 当 $F = F_{\max}$ 时, 两轮在点 D 和 E 所受到的滑动摩擦力和滚动摩阻力偶矩。

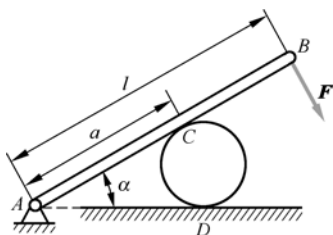


习题图 6-22

- 6-23 如习题图 6-23 所示, 不计重量的杠杆 AB 搁在一个圆柱上, 一端 A 用铰链固定, 另一端 B 作用一个与杆相垂直的力 F 。求证:

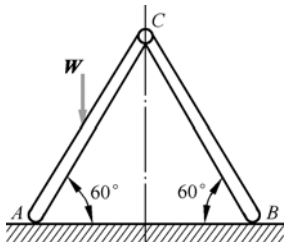
- (1) 不计圆柱重量, 各接触面的摩擦角大于 $\frac{\alpha}{2}$ 时, 不论 F 多大, 圆柱都不会被挤出, 而处于自锁状态;

- (2) 设圆柱重为 P , 则圆柱的自锁条件为 $f_{sC} \geq \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$, $f_{sD} \geq \frac{Fl \sin \alpha}{(Fl + Pa)(1 + \cos \alpha)}$, 其中, f_{sC} 和 f_{sD} 分别为圆柱与杠杆及圆柱与地面之间的静摩擦系数。



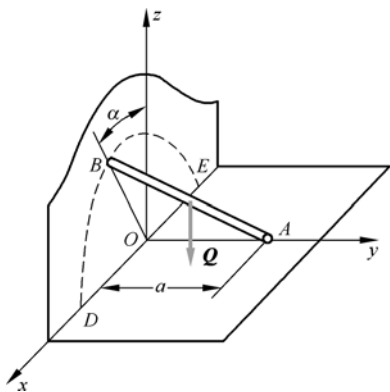
习题图 6-23

- 6-24 习题图 6-24 所示的折梯放在铅垂面内, 两脚与地面间的静摩擦系数分别为 $f_{sA} = 0.2$ 和 $f_{sB} = 0.6$, 折梯一边 AC 的中点上有一个重为 500 N 的重物, 不计折梯重量, 试问能否平衡? 如果平衡, 计算两脚与地面间的摩擦力。



习题图 6-24

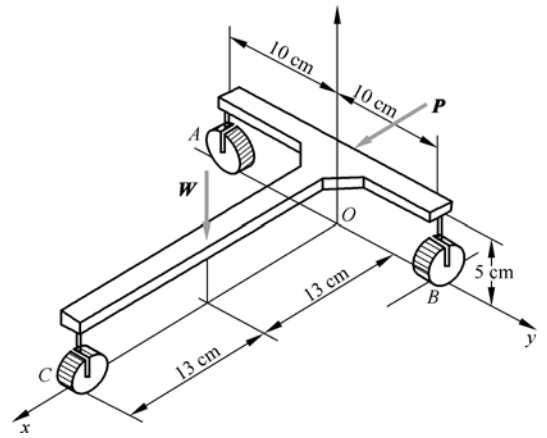
- 6-25 如习题图 6-25 所示, 均质杆 AB 长为 l , 重为 Q , 一端 A 用铰链固定, 另一端 B 搁在铅垂墙上, 铰链 A 到墙的距离 $OA = a$ 。设杆端 B 和墙之间的摩擦系数为 f , 求图中 α 角多大时杆 B 端将开始沿着墙滑动。



习题图 6-25

研究性题

- 6-26 T形架由三个能够自由滚动的轮子支撑，轮子 A 能够在 y 轴方向滚动，轮子 B 和 C 能够在 x 轴方向滚动。已知 $W = 500 \text{ N}$ ， $P = 100 \text{ N}$ ，求平衡时各轮子上的支承力。如果轮子与地面的静摩擦系数 $f = 0.5$ ，问架子能否保持平衡？



习题图 6-26

附录 A

习题参考答案

第 1 章

1-1 $F_x = 136.6\text{ N}$, $F_y = 70\text{ N}$

1-2 $\boldsymbol{P} = -9.64\boldsymbol{i} + 16.70\boldsymbol{j} + 22.98\boldsymbol{k}$ N

1-3 $\theta_z = 54.52^\circ$, $\boldsymbol{F} = 154.3\boldsymbol{i} + 120.0\boldsymbol{j} + 139.3\boldsymbol{k}$ N

1-4 0

1-5 $F_x = -40\sqrt{2}$ N, $F_y = 30\sqrt{2}$ N, $F_z = 240\sqrt{2}$ N

1-6 $\boldsymbol{F} = 63.0\boldsymbol{i} - 52.5\boldsymbol{j} - 87.6\boldsymbol{k}$ N

第 3 章

3-1 $R = 352$ N, $\alpha = 33^\circ 16'$

3-2 (1) \overline{AC} ; (2) \overline{EB} ; (3) 大小相等, 方向相反; (4) \overline{AE} , \overline{EB} ; (5) \overline{AE} , \overline{ED} ; (6) 平衡

3-3 -90.06 kN, 5.73 kN

3-4 $F_1 = 1.389$ kN, $F_2 = -0.354$ kN

3-5 $F_{AC} = -27.3$ kN; $F_{AB} = -7.32$ kN

3-6 $R = \frac{l}{2h}P$

3-7 $N_A = 0.8$ kN, $N_B = 0.8$ kN, $N_C = 1.2$ kN

3-8 (1) $S_{AC} = -1.155Q$, $S_{AB} = 0.577Q$

(2) $S_{AC} = -0.3674Q$, $S_{AB} = 1.064Q$

(3) $S_{AC} = -0.866Q$, $S_{AB} = 0.5Q$

(4) $S_{AB} = S_{AC} = 0.577Q$

3-9 (1) -88.8 N·m; (2) 395 N \leftarrow ; (3) 280 N, 45°

3-10 $R_A = R_B = 20$ kN

3-11 $\alpha \geq 56.4^\circ$

3-12 $T = 34.6$ kN; $Q = 17.3$ kN

$$3-13 \quad S_{AD} = S_{AC} = -539 \text{ kN}$$

$$3-14 \quad -44.8 \text{ kN}, 32.8 \text{ kN}$$

$$3-15 \quad F_1 = 200 \text{ N}, F_2 = 200\sqrt{3} \text{ N}, F = 100\sqrt{3} \text{ N}, \alpha = 0^\circ$$

$$3-16 \quad (a) \quad m_C = 252 \text{ N} \cdot \text{m}, R_{Cx} = 1087 \text{ N} \leftarrow, R_{Cy} = 435 \text{ N} \uparrow$$

$$(b) \quad m_C = 184 \text{ N} \cdot \text{m}, R_{Cx} = 600 \text{ N} \leftarrow, R_{Cy} = 800 \text{ N} \uparrow$$

$$3-17 \quad (a) \quad F_A = 15.8 \text{ kN}, F_B = 7.07 \text{ kN}$$

$$(b) \quad F_A = 22.4 \text{ kN}, F_B = 10 \text{ kN}$$

$$3-18 \quad 2.5 \text{ kN}, 1.8 \text{ kN}$$

$$3-19 \quad 5 \text{ kN}$$

$$3-20 \quad 81.8 \text{ kN}$$

$$3-21 \quad \frac{P}{Q} = 0.612$$

$$3-22 \quad W_{\min} = \frac{2(R-r)}{R} Q$$

$$3-23 \quad (1) \alpha = 30^\circ; (2) W_B = 1/3 W$$

$$3-24 \quad N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = -\sqrt{2}P, F_{AB} = F_{BC} = F_{CD} = P$$

$$3-25 \quad \cos \varphi = \frac{kl_0}{2(Rk - P)}$$

$$3-26 \quad T_{AC} = T_{CB} = 95.4 \text{ kN}, T_{CD} = 7.43 \text{ kN}$$

第 4 章

$$4-1 \quad (1) \quad R = 0, M = 3Pl$$

$$(2) \quad R = 0, M = 3Pl$$

$$4-2 \quad R = \sqrt{(P_1 + P_2)^2 + P_2^2}$$

$$\alpha = \arctan(P_1 + P_2) / P_2$$

$$M_O = P_1 e_1 - P_2 e_2 - P_3 h$$

$$4-3 \quad \alpha = \arccos \left[\frac{2(F+G)a}{(2P+G)l} \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$4-4 \quad R_B = 8.57 \text{ kN} \rightarrow; R_C = 13.17 \text{ kN}, \angle 49.4^\circ$$

$$4-5 \quad R_A = 15 \text{ kN}, \quad R_B = 21 \text{ kN}$$

$$4-6 \quad (a) \quad X_A = 0, \quad Y_A = R_B = 2.31 \text{ kN}$$

$$(b) \quad X_A = 0, \quad Y_A = -0.1631 \text{ kN}; \quad R_B = 10.82 \text{ kN}$$

$$4-7 \quad X_A = -3 \text{ kN}, \quad Y_A = -0.25 \text{ kN}; \quad Y_B = 4.25 \text{ kN}$$

$$4-8 \quad X_A = -\frac{\sqrt{2}}{2}P, \quad Y_A = \frac{\sqrt{2}}{2}P, \quad m_A = \sqrt{2}Pa$$

$$4-9 \quad R_A = -2 \text{ kN}, \quad R_B = 1 \text{ kN}, \quad R_C = -1 \text{ kN}$$

$$4-10 \quad R_A = R_B = 28 \text{ kN}$$

$$4-11 \quad (a) \quad R_A = 2qa \uparrow, \quad M_A = 2qa^2 (\text{逆}), \quad R_B = 0, \quad R_C = 0$$

$$(b) \quad R_A = R_C = qa \uparrow, \quad M_A = 2qa^2 (\text{逆}), \quad R_B = qa (\downarrow \uparrow)$$

$$(c) \quad R_A = 1.75qa \uparrow, \quad M_A = 3qa^2 (\text{逆}), \quad R_B = 0.75qa (\downarrow \uparrow), \quad R_C = 0.25qa \uparrow$$

$$(d) \quad R_A = \frac{M}{2a} \downarrow, \quad M_A = M (\text{顺}), \quad R_B = \frac{M}{2a} (\downarrow \uparrow), \quad R_C = \frac{M}{2a} \uparrow$$

$$(e) \quad M_A = M (\text{逆}), \quad R_B = 0, \quad R_C = 0$$

$$4-12 \quad F_{Ax} = -20 \text{ kN}, \quad F_{Ay} = -1.25 \text{ kN}, \quad F_{Bx} = 20 \text{ kN}, \quad F_{By} = 11.25 \text{ kN}$$

$$4-13 \quad F_{Ax} = -P, \quad F_{Ay} = -P, \quad F_{Bx} = -P, \quad F_{By} = 0, \quad F_{Dx} = 2P, \quad F_{Dy} = P$$

$$4-14 \quad S = \frac{a \cos \alpha}{2h} P$$

$$4-15 \quad R_A = -20 \text{ kN}, \quad R_B = 60 \text{ kN}, \quad R_C = 60 \text{ kN}, \quad R_D = -20 \text{ kN}$$

$$4-16 \quad X_A = 26.1 \text{ kN}, \quad Y_A = 28 \text{ kN}; \quad S_1 = 32.6 \text{ kN}$$

$$S_2 = -41.8 \text{ kN}, \quad S_3 = 26.1 \text{ kN}$$

$$4-17 \quad P = \frac{11}{90} Q$$

$$4-18 \quad P = \left(1 - \frac{r}{R}\right) \frac{Q}{2}$$

$$4-19 \quad M = 6000 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

$$4-20 \quad R_A = 6.57 \text{ kN} \leftarrow, R_{Bx} = 6.57 \text{ kN} \rightarrow, R_{By} = 13.24 \text{ kN} \uparrow$$

$$4-21 \quad T = 146.8 \text{ kN}, R_{Ax} = 137.9 \text{ kN} \rightarrow, R_{Ay} = 84.5 \text{ kN} \uparrow$$

$$4-22 \quad F_y = F + ql, M = Fl + \frac{1}{2}ql^2$$

$$4-24 \quad F_{Ax} = -100 \text{ kN}, F_{Ay} = -80 \text{ kN}, F_B = 120 \text{ kN}, F_D = 0$$

$$4-25 \quad S_{BD} = S_{EG} = S_{CE} = 0, S_{CD} = S_{AD} = -8 \text{ kN}; S_{AB} = 6.93 \text{ kN}, S_{BC} = 6.93 \text{ kN}; S_{EF} = S_{BE} = 3.47 \text{ kN}; S_{CG} = S_{FG} = -4 \text{ kN}$$

$$4-26 \quad S_{AB} = S_{BC} = S_{CJ} = S_{EH} = S_{EG} = 0, S_{DE} = S_{EF} = 38.9 \text{ kN}, S_{FG} = S_{GH} = -33.3 \text{ kN}, S_{CD} = 33.3 \text{ kN}, S_{DH} = 10 \text{ kN}, S_{CH} = -13.02 \text{ kN}, S_{AC} = 39.1 \text{ kN}, S_{AJ} = S_{HJ} = -25 \text{ kN}$$

$$4-27 \quad S_{GH} = 0, S_{DF} = 0.333P, S_{CF} = -0.333P, S_{CD} = 0.471P$$

$$4-28 \quad S_{DE} = -125 \text{ kN}, S_{EG} = 53 \text{ kN}, S_{EH} = -87.5 \text{ kN}$$

$$4-29 \quad X_G = 11 \text{ kN}, Y_G = 3 \text{ kN}, S_{DE} = 15.56 \text{ kN}$$

$$4-30 \quad R_{Ax} = 0.619P \rightarrow, R_{Ay} = 0.809P \uparrow; R_{Bx} = 0.619P \leftarrow, R_{By} = 0.191P \uparrow$$

$$4-31 \quad X_A = 0, Y_A = R_B = 360 \text{ kN}$$

$$4-32 \quad R_{Ax} = 5.63 \text{ kN} \rightarrow, R_{Ay} = 16.9 \text{ kN} \uparrow$$

$$R_B = 1.26 \text{ kN}, \angle 63.4^\circ$$

$$4-33 \quad R_A = 726 \text{ kN} \uparrow, R_B = 604 \text{ kN} \uparrow$$

$$4-34 \quad R_A = 33450 \text{ kN} \uparrow, R_B = 6350 \text{ kN} \uparrow, K = 2.05$$

$$4-35 \quad S_{KL} = -60.8 \text{ kN}, S_{LN} = -36.5 \text{ kN}, S_{LO} = 20.3 \text{ kN}$$

$$4-36 \quad F_1 = -P, F_2 = 0, F_3 = -2P$$

$$4-37 \quad T_1 = 331 \text{ kN}, T_2 = 218 \text{ kN}, R_{Ax} = 234 \text{ kN} \rightarrow, R_{Ay} = 137 \text{ kN} \uparrow$$

$$4-38 \quad (1) \quad S_1 = 87.6 \text{ kN}, S_2 = 90.8 \text{ kN}, S_3 = 153.3 \text{ kN}, S_4 = 223 \text{ kN}, S_5 = S_6 = 46.0 \text{ kN}$$

$$(2) \quad R_{Ax} = 64.2 \text{ kN} \leftarrow, R_{Ay} = 36.8 \text{ kN} \uparrow$$

$$(3) \quad S_{EF} = 176.8 \text{ kN} \quad (\text{压力})$$

第5章

$$5-1 \quad -101.4 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$5-2 \quad M_C = 50 \text{ kN}\cdot\text{m}, \text{ 沿 } x \text{ 轴负向}$$

$$5-3 \quad \mathbf{R}' = -F \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} - F \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + F \cdot \sqrt{2} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_O = \frac{1}{\sqrt{2}} 3F_a \mathbf{j}$$

\mathbf{R}' 不垂直 \mathbf{M}_O , 最后简化结果为力螺旋。

$$5-4 \quad \text{向 } B \text{ 简化的主矢: } R'_x = 50 \text{ N}, R'_y = 0, R'_z = 50 \text{ N}$$

$$\text{向 } B \text{ 简化的主矩: } M_{xB} = 2.5 \text{ N}\cdot\text{m}, M_{yB} = 0, M_{zB} = 0$$

进一步简化为力螺旋。简化中心坐标为(0, 0.025m, 0)

$$\text{主矩: } M_x = 1.76 \text{ N}\cdot\text{m}, M_y = 0, M_z = 1.76 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$5-5 \quad F_1 = F_2 = -3 \text{ kN}, T = 6 \text{ kN}$$

$$5-6 \quad F_1 = F_2 = -10 \text{ kN}, F_3 = -10\sqrt{2} \text{ kN}, F_4 = F_5 = 10 \text{ kN}, F_6 = -20 \text{ kN}$$

$$5-7 \quad F_{BC} = F_{BD} = 8.34 \text{ kN}, F_A = 122.4 \text{ kN}$$

$$5-8 \quad M = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}; \alpha = 90^\circ, \beta = 143^\circ 8', \gamma = 53^\circ 6'$$

$$5-9 \quad M_1 = \frac{d + M_2 b}{a}, \mathbf{F}_A = \frac{M_3}{a} \mathbf{j} + \frac{M_2}{a} \mathbf{k}, \mathbf{F}_D = -\frac{M_3}{a} \mathbf{j} - \frac{M_2}{a} \mathbf{k}$$

$$5-10 \quad m_y(F) = -3030 \text{ N}\cdot\text{cm}$$

$$5-11 \quad m_x(P) = -12.5 \text{ kN}\cdot\text{m}, m_y(P) = -5 \text{ kN}\cdot\text{m}, m_z(P) = 0$$

$$5-12 \quad T_2 = 4 \text{ kN}; T'_2 = 2 \text{ kN}; F_{Ax} = -6.38 \text{ kN}, F_{Az} = 1.3 \text{ kN}$$

$$F_{Bx} = -4.13 \text{ kN}, F_{Bz} = 3.9 \text{ kN}$$

$$5-13 \quad F_1 = P, F_2 = -\sqrt{2}P, F_3 = -P, F_4 = \sqrt{2}P, F_5 = \sqrt{2}P, F_6 = -P$$

$$5-14 \quad R_{Ax} = -500 \text{ N}, R_{Az} = 400 \text{ N}, R_{Bx} = 500 \text{ N},$$

$$R_{By} = 600 \text{ N}, R_{Cy} = -600 \text{ N}, R_{Cz} = 400 \text{ N}$$

$$5-15 \quad R_x = 579 \text{ N}, R_y = 689 \text{ N}, R_z = 450 \text{ N}$$

$$M_x = 573 \text{ N}\cdot\text{m}, M_y = 327 \text{ N}\cdot\text{m}, M_z = -2536 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$5-16 \quad S = 667 \text{ N}, \quad R_{Kx} = -667 \text{ N}, \quad R_{Kz} = -100 \text{ N},$$

$$R_{Hx} = 113.3 \text{ N}, \quad R_{Hz} = 500 \text{ N}$$

$$5-17 \quad F_{Ax} = 400 \text{ N}, \quad F_{Ay} = 800 \text{ N}, \quad F_{Az} = 500 \text{ N}$$

$$F_{CE} = 707 \text{ N}, \quad F_{By} = -500 \text{ N}, \quad F_{Bz} = 0$$

$$5-18 \quad (\text{a}) \quad x_C = 0.5a, \quad y_C = 0.4b$$

$$(\text{b}) \quad x_C = y_C = 0.45a$$

$$(\text{c}) \quad x_C = 0.363L, \quad y_C = 0.393a$$

$$(\text{d}) \quad x_C = 0.3a, \quad y_C = 0.75b$$

$$5-19 \quad x_C = -\frac{r^2 R}{2(R^2 - r^2)}, \quad y_C = 0$$

$$5-20 \quad x_C = 1.469 \text{ m}, \quad y_C = 0.938 \text{ m}$$

$$5-21 \quad h = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$5-22 \quad x_C = y_C = 0, \quad z_C = 0.771 \text{ m}$$

$$5-23 \quad x_C = 0, \quad y_C = 54.5 \text{ cm}$$

$$5-24 \quad a = 2.54r, \quad \alpha = 51.8^\circ$$

$$5-25 \quad m_{AB}(P) = Pa \sin \alpha \sin \theta$$

$$5-26 \quad M = 19140 \text{ N} \cdot \text{cm}, \quad \alpha = 68^\circ 18', \quad \beta = 105^\circ 6', \quad \gamma = 26^\circ 54'$$

$$5-27 \quad M = 3000\sqrt{3} \text{ N} \cdot \text{cm}, \quad \alpha = 65^\circ 54', \quad \beta = 65^\circ 54', \quad \gamma = 35^\circ 18'$$

$$5-28 \quad F_1 = F_4 = 1 \text{ kN}, \quad F_2 = -1 \text{ kN}, \quad F_3 = F_5 = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ kN}, \quad F_6 = -\sqrt{7} \text{ kN},$$

$$F_{Bx} = 0, \quad F_{By} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ kN}, \quad F_{Bz} = 1 \text{ kN}, \quad F_{Cy} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ kN}, \quad F_{Cz} = 1 \text{ kN}, \quad F_{Dy} = \sqrt{3} \text{ kN}$$

$$5-29 \quad F_{AD} = 105.7 \text{ N}, \quad F_{BD} = 52.8 \text{ N}, \quad F_{CD} = 91.5 \text{ N}$$

$$5-30 \quad F_1 = F_2 = 0, \quad F_3 = 1.667 \text{ kN}, \quad F_4 = -1.667 \text{ kN}, \quad F_5 = -1.333 \text{ kN}, \quad F_6 = 1.333 \text{ kN}$$

$$5-31 \quad M_B = \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} M_A$$

$$5-32 \quad x_C = 2.02 \text{ m}, \quad y_C = 1.155 \text{ m}, \quad z_C = 0.716 \text{ m}$$

$$5-33 \quad h = 0.272 \text{ m}$$

$$5-34 \quad x_C = 0, \quad y_C = 21.5 \text{ mm}, \quad z_C = 40.3 \text{ mm}$$

$$5-35 \quad F_{DI} = -P, \quad F_{DH} = 0, \quad F_{AF} = P, \quad F_{AI} = 0, \quad F_{BG} = -P$$

$$5-36 \quad x_C = -0.41 \text{ m}, \quad y_C = 21.7 \text{ m}$$

$$5-37 \quad F_{Cz} = \frac{F}{4} + \frac{M}{l} (\downarrow); \quad M_C = \frac{Fl}{8} + \frac{3ql^3}{32} - \frac{M}{2}$$

第6章

6-1 $F = 98 \text{ N}$

6-2 $T = 21 \text{ kN}$

6-3 (a) $P_{\min} = 140 \text{ kN}$; (b) $P_{\min} = 265 \text{ kN}$

6-4 $\cot \alpha = \frac{2f_s(P+W)}{2P+W}$

6-5 $s = 0.456L$, $\theta \geq 74.1^\circ$

6-6 $P_{\min} = 377 \text{ N}$

6-7 $a_{\max} = \frac{4\sqrt{3}+3}{51}l$

6-8 (1) $P_{\min} = \frac{W \tan \varphi_m}{2 \cos \theta}$

(2) $M_{\min} = \frac{WR}{2 \cos \theta} \sin 2\varphi_m$

6-9 $f = 2/3$

6-10 $a < 10 \text{ cm}$

6-11 $f_s \geq \frac{\delta}{2R}$

6-12 $P = 57.2 \text{ N}$

6-13 $P = 0.1 \text{ kN}$

6-14 $P_{\min} = \frac{Qr}{aR} \left(\frac{b}{f} - c \right)$

6-15 $T_2 = 16.33 \text{ kN}$, $T_1 = 6.73 \text{ kN}$, $m_1 = 2.49 \text{ kN} \cdot \text{m}$

6-16 $T_2 = 2.68 \text{ kN}$, $T_1 = 1.19 \text{ kN}$

6-17 196.1 N , 784 N

6-18 $T = \left(\frac{f}{r} \cos \theta + \sin \theta \right) P$

6-19 (1) $P_{\min} = 80.3 \text{ kN}$; (2) $Q = 30 \text{ kN}$

6-20 若 $f_s > \frac{\delta}{r}$, 则 $\alpha \leq \arctan \frac{\delta}{r}$

若 $f_s < \frac{\delta}{r}$, 则 $\alpha \leq \arctan f_s$

6-21 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}(f_{s1} + f_{s2})}{f_{s2} - f_{s1} + 2\sqrt{3}}$

6-22 (1) $F_{\max} = 0.36 \text{ kN}$

(2) $F_D = 0.089 \text{ N}$, $F_E = 0.089 \text{ N}$, $M_D = 0.889 \text{ N}\cdot\text{cm}$, $M_E = 0.889 \text{ N}\cdot\text{cm}$

6-24 能; $F_A = F_B = 72.2 \text{ N}$

6-25 $\alpha = \arctan \frac{fa}{\sqrt{l^2 - a^2}}$

6-26 $R_{Ax} = -100 \text{ N}$, $R_{Az} = 115.4 \text{ N}$, $R_{By} = -38.5 \text{ N}$,

$R_{Bz} = 115.4 \text{ N}$, $R_{Cy} = 38.5 \text{ N}$, $R_{Cz} = 269 \text{ N}$

当 $f = 0.5$ 时, 不能平衡。

参 考 文 献

- [1] 中国大百科全书编辑委员会. 北京: 中国大百科全书出版社, 1985.
- [2] 谢传峰. 静力学. 北京: 高等教育出版社, 1999.
- [3] 哈尔滨工业大学理论力学教研室. 理论力学: (I). 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [4] 单辉祖, 谢传峰. 工程力学 (静力学和材料力学). 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [5] 同济大学理论力学教研室. 理论力学: 上册. 北京: 人民教育出版社, 1979.
- [6] Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston Jr. 工程师的矢量力学 静力学 (国际单位制第 3 版). 北京: 清华大学出版社, 2003.